



**APLIKASI MATEMATIKA
UNTUK MENENTUKAN VAKSINASI OPTIMAL
DALAM MEMINIMUMKAN BIAYA
PENGENDALIAN PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM
BERDARAH**

LAPORAN PENELITIAN

Oleh :

Dr. Asep K. Supriatna

Dr. Diah Chaerani

Nursanti Anggriani, MSi

Firdaniza, MSi

DIBIYAI OLEH DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
SESUAI DENGAN SURAT PERJANJIAN PELAKSANAAN PEKERJAAN PENELITIAN

NOMOR 031/SP2H/PP/DP2M/III/2007

Tanggal 29 Maret 2007

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN**

November 2007

RINGKASAN DAN SUMMARY

Ringkasan

APLIKASI MATEMATIKA UNTUK MENENTUKAN VAKSINASI OPTIMAL DALAM MEMINIMUMKAN BIAYA PENGENDALIAN PENYEBARAN PENYAKIT

**Asep K. Supriatna, Diah Chaerani, Nursanti Anggriani, Firdaniza
2007**

Penelitian ini mencoba menjawab permasalahan mengenai tingkat vaksinasi optimum yang harus dilakukan agar dapat menghentikan penyebaran suatu penyakit menular. Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari penelitian sebelumnya, dimana penelitian sebelumnya hanya melihat tingkat vaksinasi minimum tanpa memperhitungkan kendala yang ada. Metode yang dipakai untuk memperoleh jawaban tersebut adalah dengan pemodelan matematika.

Fokus pada penelitian tahun pertama membahas pengembangan model dengan mengasumsikan bahwa penyebaran penyakit terjadi secara langsung dari satu inang ke inang lainnya, tanpa melalui perantara (vektor). Hasil pada tahun pertama meliputi tingkat vaksinasi optimum untuk model populasi dengan struktur penyebaran SIR tanpa vektor. Dalam penelitian ini juga dikembangkan software untuk penentuan vaksinasi optimal tersebut.

Lembaga Peneliti: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Alam
Universitas Padjadjaran

No Kontrak: NOMOR 031/SP2H/PP/DP2M/III/2007 – 29 Maret 2007

Summary

THE APPLICATION OF MATHEMATICS TO DETERMINE THE OPTIMAL VACCINATION IN MINIMIZING THE COST OF DISEASE TRANSMISSION CONTROL

**Asep K. Supriatna, Diah Chaerani, Nursanti Anggriani, Firdaniza
2007**

This research discussed an epidemiological problem to obtain the optimum level of vaccination to eradicate an infectious disease. This research is a continuation of the previous research in which only looked at a minimum vaccination level. This was done using mathematical modeling.

The focus of the first year of the research was the discussion of an infectious disease transmission spreading directly from host to host without a vector. The result in the first year of the research included an optimum vaccination level for a population having an SIR structure without vector. In this research we also developed the software to determine the optimal vaccination level.

Researchers' Institution: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural
Sciences

Universitas Padjadjaran

Contract Number: NOMOR 031/SP2H/PP/DP2M/III/2007 – 29 Maret 2007

PRAKATA

Dokumen ini merupakan Laporan Penelitian Hibah Bersaing yang dilakukan di Jurusan matematika FMIPA UNPAD tahun 2007. Dalam kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih kepada pihak pemberi dana, yaitu Dirjen Pendidikan Tinggi yang telah memberika kesempatan kepada kami untuk dapat melaksanakan penelitian ini, melalui pendanaan Penelitian Hibah Bersaing ini. Kami berharap agar penelitian ini dapat memberikan kontribusi bukan saja terhadap Jurusan matematika FMIPA Unpad, tetapi kepada semua pihak yang dapat melihat adanya manfaat pada hasil penelitian ini.

DAFTAR ISI

LEMBAR IDENTITAS DAN PENGESAHAN.....	Error! Bookmark not defined.
RINGKASAN DAN SUMMARY	Error! Bookmark not defined.
PRAKATA	Error! Bookmark not defined.
I. PENDAHULUAN	5
II. TINJAUAN PUSTAKA	6
III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	8
IV. METODE PENELITIAN.....	11
V. HASIL DAN PEMBAHASAN.....	14
VI. KESIMPULAN DAN SARAN	39
DAFTAR PUSTAKA.....	40

I. PENDAHULUAN

Berbagai penyakit menular dewasa ini masih menjadi masalah nasional di Indonesia. Misalnya penyakit demam berdarah (dengue fever). Penyakit demam berdarah merupakan suatu penyakit yang cukup membahayakan. Sekitar dua setengah milyar orang di seluruh dunia mempunyai resiko terjangkit penyakit ini karena tinggal di daerah endemik. Umumnya dengue muncul di negara-negara tropis, seperti di Indonesia. Penyakit ini ditularkan melalui vektor nyamuk *Aedes aegypti*. Umumnya penanggulangan penyakit ini dilakukan dengan cara pemberantasan nyamuk *Aedes aegypti* sebagai vektor pembawa virus penyakit tersebut.

Studi teoritis pendahuluan memperlihatkan bahwa keberhasilan pengendalian dengue sangat bergantung kepada parameter-parameter pertumbuhan dari nyamuk *Aedes aegypti* yang menjadi vektor penyebaran dengue tersebut. Studi teoritis pendahuluan lainnya juga memperlihatkan bahwa ledakan dengue mempunyai pola yang tidak linier terhadap jumlah populasi nyamuk. Hal ini juga terlihat dalam fakta yang terjadi belakangan ini, dimana mass media memberitakan beberapa kasus dengue di Kotamadya Bandung pada akhir bulan April 2001 dan 2008 yang bukan merupakan *peak season* pertumbuhan *Aedes aegypti*. Ketaklinearan seperti ini harus dipahami dengan betul untuk mendapatkan informasi yang tepat tentang saat-saat pengendalian vektor pembawa dengue ini.

Beberapa penelitian lain memperlihatkan bahwa penanggulangan dengan fogging tidak efektif dan hanya bersifat sesaat. Di lain pihak, selain dengan fogging, pengendalian penyakit ini juga dapat dilakukan dengan vaksinasi. Sejauh ini perkembangan pembuatan vaksin untuk penyakit demam berdarah sudah menunjukkan ke arah yang menggembirakan dengan ditemukannya beberapa jenis vaksin oleh berbagai peneliti. Adapun tujuan dari penelitian yang diusulkan ini adalah untuk memahami pola penyebaran suatu penyakit menular, misalnya demam berdarah, dengan bantuan studi interdisipliner yang melibatkan matematika, statistika & informatika sehingga diperoleh dukungan landasan ilmiah yang kuat untuk menentukan tingkat vaksinasi **optimal** yang diperlukan dalam rangka pengendalian penyebaran penyakit demam berdarah.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Demam Berdarah (DBD) merupakan suatu penyakit yang harus diwaspadai. Gubler dan Clark (1995) menyebutkan bahwa sekitar dua setengah milyar orang di seluruh dunia mempunyai resiko terjangkit penyakit ini. Penyakit ini sangat mematikan, rata-rata kematian bisa mencapai 40% kalau penderita dibiarkan tanpa pengobatan (Beneson, 1990). Umumnya DBD muncul di negara-negara tropis. Tetapi beberapa ilmuwan memprediksi bahwa kalau terjadi pemanasan bumi (*climate change*), tidak mustahil penyebaran juga bisa sampai ke tempat yang lebih dingin atau sub-tropis (Patz dkk, 1996). Hal inilah, salah satunya, yang mendorong banyaknya penelitian DBD di negara-negara maju, yang umumnya beriklim sub-tropis. Banyaknya penelitian ini juga memudahkan peneliti-peneliti berikutnya untuk memulai dari mana penelitian demam berdarah harus dilakukan.

Dari literatur diperoleh suatu kesimpulan bahwa upaya untuk penanggulangan DBD umumnya dilakukan dengan pengendalian vektor demam berdarah, yaitu nyamuk *Aedes aegypti*, dengan melakukan fogging/fuming. Secara umum, penyebaran DBD erat kaitannya dengan kondisi iklim di tempat yang bersangkutan. Kondisi iklim ini menentukan sifat biologis/fisik dari *Aedes aegypti*, yang pada akhirnya juga menentukan sifat dan pola penyebaran DBD ini (Focks dkk, 1995; Doshoff dan Levin, 1995). Hal ini mengisyaratkan bahwa pengendalian vektor harus juga memperhatikan iklim dimana vektor tersebut hidup.

Beberapa penelitian teoritis telah dilaksanakan dalam kaitannya dengan fuming/fogging untuk pemberantasan penyakit demam berdarah ini. Studi teoritis pendahuluan yang telah dilakukan oleh Supriatna & Soewono (2000) dan Soewono & Supriatna (2001) memperlihatkan bahwa keberhasilan pengendalian dengue sangat bergantung kepada parameter-parameter biologi pertumbuhan dari nyamuk *Aedes aegypti* yang menjadi vektor penyebaran dengue tersebut. Studi teoritis pendahuluan lainnya juga memperlihatkan bahwa ledakan dengue mempunyai pola yang tidak linier terhadap jumlah populasi nyamuk. Hal ini juga terlihat dalam fakta yang terjadi belakangan ini, dimana mass media memberitakan beberapa kasus dengue di Kota Bandung pada akhir bulan April 2001 yang bukan merupakan *peak season* pertumbuhan *Aedes aegypti*.

Dalam upaya penanggulangan vektor penyakit demam berdarah ini, beberapa peneliti telah menawarkan alternatif yang lain selain fogging. Dalam suatu penelitian Hibah Bersaing, telah diusulkan pengontrolan vektor yang dilakukan dengan biological control, yaitu dengan pemberian predator alami kepada vektor tersebut, yang dalam hal ini dengan menggunakan *Toxorhynchites*

amboinendis (Mangaraja, 1998). Cara lain adalah dengan vaksinasi. Sebagai catatan, studi yang diusulkan sekarang ini sejalan dengan perkembangan pembuatan vaksin untuk penyakit demam berdarah yang sejauh ini sudah menunjukkan ke arah yang menggembirakan dengan ditemukannya beberapa jenis vaksin oleh berbagai peneliti, seperti N. Bhamarapavati & Y. Sutee (*Vaccine* 18: 44-47, 2000) serta T.P. Monath (*Vaccine* 20: 1004-1018, 2002).

Berkaitan dengan vaksinasi ini, kendatipun perkembangan pembuatan vaksin sudah memperlihatkan ke arah yang menggembirakan, namun efek vaksinasi terhadap penyebaran penyakit itu sendiri belum dipahami dengan baik. Di dalam literatur hanya ada beberapa peneliti saja yang telah mempelajari efek vaksinasi terhadap pola penyebaran penyakit, diantaranya Shulgin dkk (1998), Yang & Silveira (1998), serta Abual-Rub (2000). Penelitian yang lebih memfokuskan kepada strategi vaksinasi telah dilakukan oleh Supriatna & Soewono (2003) dan Soewono & Supriatna (2003) yang memperlihatkan bahwa efek vaksinasi begitu kompleks. Dalam Supriatna & Soewono (2003) diperoleh suatu kesimpulan bahwa tingkat vaksinasi minimum dipengaruhi oleh berbagai parameter, diantaranya parameter biologi pertumbuhan nyamuk dan parameter epidemiologi laju infeksi. Walaupun secara teoritis hal ini menggambarkan bagaimana cara memperoleh tingkat vaksinasi minimum, namun pada prakteknya hal ini sulit dilakukan. Ini disebabkan karena kedua parameter di atas susah untuk diperoleh di lapangan.

Pada tahun 2004 – 2005, telah dilakukan penelitian melalui pendanaan Penelitian Hibah Bersaing Batch – 12, yang tujuannya adalah ingin menemukan tingkat vaksinasi minimum yang dapat diaplikasikan secara langsung dengan parameter – parameter yang lebih mudah diperoleh, misalnya *age at infection*, yang relatif tersedia pada catatan medis penderita demam berdarah dan parameter lain, seperti *life expectancy*, yang juga relatif mudah diperoleh di lapangan. Penelitian berhasil dilaksanakan dan diperoleh beberapa hasil seperti pada supriatna (2004), Supriatna dkk(2004), Nurani dkk(2004). Kendatipun penelitian tersebut berhasil memperoleh tingkat vaksinasi minimum, namun dalam analisisnya belum melibatkan faktor – faktor yang secara dominan akan mempengaruhi pelaksanaan program vaksinasi, seperti biaya vaksinasi. Sehingga hasil pada penelitian tersebut belum tentu optimal secara ekonomis. Pada penelitian yang dilakukan sekarang pencarian tingkat vaksinasi dikembangkan ke arah tingkat vaksinasi optimal.

III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Membangun Model Matematika untuk memahami pola penyebaran penyakit menular dan untuk menentukan tingkat vaksinasi optimum dalam rangka penanggulangan penyakit menular .
2. Membuat makalah – makalah mengenai model matematika dan vaksinasi optimal pada penyebaran penyakit demam berdarah
3. Menyediakan topik tugas akhir mahasiswa S1
4. Terbentuknya Kelompok Penelitian Mathematical Epidemiology di Jurusan Matematika FMIPA UNPAD

Adapun tujuan khusus pada penelitian ini adalah :

1. Membentuk model matematika untuk memahami pola penyebaran penyakit menular dan untuk menentukan tingkat vaksinasi optimal dalam rangka penanggulangan penyakit menular.
2. Menentukan tingkat vaksinasi optimum dalam rangka **meminimumkan biaya** penanggulangan penyakit menular

3.2 Manfaat Penelitian

Sejalan dengan usaha pemerintah Indonesia yang sedang meningkatkan taraf kesehatan masyarakat, maka diperlukan suatu mekanisme penanggulangan penyakit menular , misalnya vaksinasi, yang didasari oleh kerangka ilmiah yang cukup kuat.

Seperti halnya pelaksanaan kebijakan yang melibatkan penduduk dengan jumlah yang besar, maka kebijakan vaksinasi merupakan suatu kebijakan yang memerlukan biaya yang besar. Dengan demikian perlu dicari tingkat vaksinasi yang minimum (berarti biaya minimum) tetapi masih tetap

efektif berfungsi sebagai pengendali penyebaran penyakit tersebut. Output dari penelitian yang direncanakan ini, salah satunya yaitu tingkat vaksinasi **optimum**, sangat dibutuhkan sebagai pendukung kebijakan dalam implementasi vaksinasi di berbagai negara berkembang.

Manfaat dari penelitian yang direncanakan ini meliputi:

1. Pengembangan IPTEK, dalam hal ini meliputi:

- Dipahaminya mekanisme dan pola penyebaran penyakit demam berdarah.
- Dipahaminya efek berbagai strategi vaksinasi yang dilakukan terhadap penyebaran penyakit demam berdarah.
- Diperolehnya tingkat **vaksinasi optimum**, yang dinyatakan dengan banyaknya proporsi penduduk yang harus divaksinasi, dimana dengan tingkat vaksinasi seperti itu diharapkan penyebaran penyakit demam berdarah dapat dikontrol, serta disaat yang bersamaan juga meminimumkan biaya implementasi.
- Penelitian ini juga memiliki dampak yang positif bagi perkembangan multidisiplin ilmu di Indonesia, yaitu Matematika, Biologi, dan Ilmu Kesehatan Masyarakat.

2. Menunjang Pembangunan Nasional:

Permasalahan yang diteliti dalam penelitian ini adalah masalah riil yang dihadapi oleh Pemerintah Indonesia. Oleh sebab itu dengan dilakukannya penelitian ini artinya kita ikut secara aktif dalam pemecahan masalah yang dihadapi oleh pemerintah. Selain itu juga dengan dilaksanakannya penelitian ini menunjukkan peran aktif pemerintah Indonesia dalam hal mengantisipasi keberhasilan pembuatan vaksin, yang sejauh ini telah menunjukkan kemajuan di beberapa negara berkembang lain dan negara maju. Dengan metode yang dikenal sekarang, dimana tingkat vaksinasi minimum diperoleh dari perhitungan basic reproduction number, diperkirakan bahwa implementasi akan memakan biaya yang sangat besar, sebab memerlukan lebih dari 75 % dari total penduduk harus divaksin. Manfaat langsung dari penelitian ini adalah diperoleh proporsi jumlah populasi yang harus divaksin yang optimal, dalam arti dapat meminimumkan biaya implementasi. Dengan kondisi perekonomian sekarang pencarian biaya implementasi vaksinasi optimal mutlak diperlukan, sehingga dana yang ada dapat dialihkan untuk tujuan pembangunan lainnya.

3. Menunjang Institusi:

Penelitian ini akan dilakukan di Jurusan Matematika FMIPA UNPAD. Sejauh ini Jurusan Matematika FMIPA UNPAD sedang konsolidasi untuk menampilkan warna penelitian unggulannya. Dalam hal ini mengingat lingkungan Universitas adalah fakultas-fakultas dengan warna sosial dan life sciences yang sangat kuat, maka jurusan matematika juga mau tidak mau diwarnai oleh lingkungan life sciences ini. Di Jurusan Matematika saat ini sudah terbentuk kelompok Matematika Terapan dengan fokus penelitian matematika Kesehatan. Penelitian yang diusulkan ini akan sangat mendukung kemajuan kelompok penelitian matematika terapan. Dalam penelitian ini akan dilibatkan mahasiswa untuk melaksanakan tugas akhir dalam topik penelitian yang diusulkan ini, sehingga dampak dari kegiatan penelitian ini betul-betul terasa pada institusi tempat peneliti. Hal ini juga diharapkan dapat mengokohkan keberadaan kelompok matematika terapan khususnya bidang matematika kesehatan.

IV. METODE PENELITIAN

Van Dyne (1969) menyebutkan bahwa ada dua cara dalam memahami fenomena alam yaitu pendekatan metodologi dan pendekatan matematis. Pendekatan yang pertama biasanya memerlukan eksperimen dalam skala besar, sedangkan pendekatan yang kedua dilakukan dengan cara mengabstraksi fenomena alam tersebut dengan sebuah model matematika. Jorgensen (1983) berpendapat bahwa model matematika bisa memprediksi pengaruh dari berbagai macam variabel tanpa memerlukan eksperimen dalam skala besar. Di dalam penelitian ini, pendekatan yang kedua ini yang akan digunakan.

Secara umum metodologinya adalah seperti yang digambarkan pada Meyer (1987) sebagai berikut :

1. Formulasi, yang meliputi :
 - a. Perumusan masalah
 - b. Pengumpulan faktor – faktor yang relevan
 - c. Deskripsi hubungan matematis antar faktor – faktor yang relevan
2. Analisis model Matematika (Dalam hal ini penggunaan teori sistem dinamik dan teori kontrol optimum)
3. Evaluasi yang meliputi interpretasi dan pengujian dalam hal : Realisme, Akurasi, Presisi, Generalisasi, dan kekekaran model.

Dalam penelitian ini akan dilakukan dalam beberapa tahap dalam waktu 2 tahun, dimana setiap tahapan saling berhubungan dan berkesinambungan. Tahapan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Studi literatur & Model Development. Dari studi ini akan dipelajari model matematika penyebaran penyakit secara umum, termasuk juga model matematika penyebaran penyakit demam berdarah. Model kemudian akan dikembangkan untuk melihat bagaimana efek vaksinansi terhadap penyebaran penyakit menular ini, yang hasilnya diharapkan dapat dipakai untuk menentukan tingkat vaksinansi optimum secara teoritis. Studi ini direncanakan dalam tahun pertama dan kedua. Studi literatur ini mencakup di dalamnya pengembangan model matematika. Adapun tahapannya meliputi:

- Identifikasi masalah

- Pengumpulan data dan informasi yang relevan dengan masalah yang dihadapi
- Pembentukan asumsi dasar sebagai acuan untuk simplifikasi atau pembatasan masalah
- Formulasi masalah dengan deskripsi matematis
- Analisis untuk mencari solusi matematis
- Interpretasi solusi & validasi model.

Langkah langkah diatas akan selalu dilakukan berulang-ulang untuk melakukan validasi dan untuk memperoleh hasil yang realistis. Iterasi pertama yang akan dilakukan adalah dengan mempelajari model yang sejauh ini sudah terbentuk. Model yang akan digunakan didasarkan pada model yang dikembangkan oleh Soewono dan Supriatna (2001) sebagai berikut :

Dalam model ini, yang menjadi pusat perhatian adalah jumlah populasi manusia yang terkena penyakit demam berdarah dan jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebagai vektor penyebar penyakit demam berdarah. Populasi manusia kita bagi menjadi tiga sub-populasi: *susceptible* S_H , *infective* I_H dan *recovered* R_H . Sedangkan populasi *Aedes aegypti* kita bagi dua sub-populasi saja mengingat masa hidup nyamuk cukup singkat dibandingkan dengan masa hidup manusia. Kedua sub-populasi tersebut adalah *susceptible* S_V dan *infective* I_V . Dengan notasi ini, model penyebaran penyakit dengue diberikan oleh:

$$\frac{dS_H}{dt} = \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - \mu_H S_H$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H$$

$$\frac{dR_H}{dt} = \gamma_H I_H - \mu_H R_H$$

$$\frac{dS_V}{dt} = A - \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V S_V$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V I_V$$

dimana β_H dan β_V berturut-turut merupakan probabilitas penyebaran demam berdarah dari nyamuk ke manusia dan dari manusia ke nyamuk, serta b merupakan rata-rata gigitan seekor nyamuk per hari. Dalam penelitian Supriatna & Soewono (2003) telah diperoleh tingkat vaksinasi minimum untuk model ini. Namun sayang bahwa tingkat vaksinasi ini bergantung kepada parameter-parameter biologi dari nyamuk yang sangat susah datanya untuk diperoleh di lapangan. Dalam penelitian supriatna (Hibah Bersaing Batch – 12, 2004- 2005) dicari rumusan lain dari tingkat vaksinasi yang hanya bergantung kepada parameter demography manusia, misalnya life expectancy, yang relatif mudah untuk diperoleh dibandingkan parameter nyamuk di atas . Hasilnya dipublikasikan pada [39,40,41]. Namun pada penelitian tersebut aspek ekonomi masih diabaikan. Dalam penelitian ini akan dicari vaksinasi optimum untuk meminimumkan biaya pengendalian penyebaran penyakit demam berdarah.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada tahap ini telah terbentuk sebuah model dasar tentang penyebaran penyakit sebagai berikut, yakni model tanpa vaksinasi dan model dengan vaksinasi

Model Tanpa Vaksinasi

4.1 Model Epidemik SIR

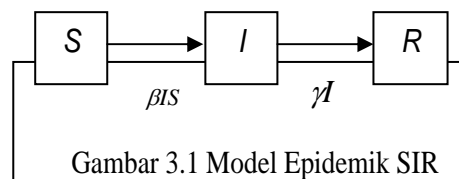
Pada model penyebaran epidemik dasar (tanpa faktor demografi), populasi N individu pada waktu t dibagi kedalam tiga kelas yaitu :

$S(t)$ – jumlah individu yang *susceptible*

$I(t)$ – jumlah individu yang *infected*

$R(t)$ – jumlah individu yang *removal*

Susceptible adalah sejumlah individu yang belum terinfeksi dan rentan untuk terinfeksi. *Infected* adalah sejumlah individu yang sudah terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit ke sejumlah individu lain. Sedangkan *removal* adalah sejumlah individu yang telah terinfeksi tetapi tidak mungkin lagi untuk menularkan penyakit dan tidak dapat menjadi *infected* kembali, karena sejumlah individu ini telah terisolasi, atau telah disembuhkan dari penyakit, atau telah kebal terhadap penyakit tersebut, atau meninggal karena penyakit tersebut.



Diasumsikan bahwa total populasi $N = S + I + R$ konstan. Pada model ini *susceptible* yang terinfeksi akan menjadi *infected* dengan laju infeksi sebesar β . Sedangkan sebagian dari sejumlah individu yang *infektive* akan menjadi *removal* dan sebagian lagi akan menjadi *infected* yang akan menularkan penyakit ke subpopulasi lainnya dengan laju *removal* sebesar γ .

Dalam memformulasi model dalam hal turunan dari ukuran tiap kelas populasi, maka diasumsikan bahwa jumlah individu pada tiap kelas populasi berbentuk fungsi diferensial terhadap

waktu. Dalam memformulasikan model sebagai persamaan diferensial, diasumsikan bahwa proses epidemik adalah *deterministic*, yaitu tingkah laku populasi ditentukan secara lengkap oleh aturan-aturan yang mempengaruhi perkembangan dari model tanpa adanya aspek probabilitas.

Untuk menggambarkan situasi ini maka pada tahun 1927 Kermack dan McKendrick mengemukakan suatu model, yaitu :

$$S'(t) = -\beta IS \quad (3.1)$$

$$I'(t) = \beta IS - \gamma I \quad (3.2)$$

$$R'(t) = \gamma I \quad (3.3)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0$$

Dimana β adalah laju infeksi, γ adalah laju *removal*, S_0 adalah jumlah awal individu *susceptible*, dan I_0 adalah jumlah awal individu *infected*.

Kemudian akan digambarkan solusi model penyebaran epidemik sederhana sebagai suatu lintasan dalam bidang *SI* agar lebih mudah untuk lebih mengerti model, untuk menentukan nilai batas pasti dari masing – masing kelas populasi, dan juga untuk melihat solusi model di atas.

Jika persamaan (3.1) dibagi persamaan (3.2), maka diperoleh :

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{\beta IS - \gamma I}{-\beta IS} \quad (3.4)$$

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \rho/S$$

Dimana $\rho = \gamma / \beta$ merupakan laju *removal* relatif. Selanjutnya, untuk menemukan solusi dari persamaan (3.4), lakukan pemisahan variabel kemudian mengintegalkannya sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
dI &= (-1 + \rho/S) dS \\
I + C &= -S + \rho \ln S + C \\
S + I - \rho \ln S &= C \\
\phi(S, I) &= S + I - \rho \ln S = C
\end{aligned}$$

Dimana C konstanta. Jadi solusi bagian dalam bidang SI bergantung hanya pada laju *removal* relatif ρ . Solusi melalui titik (S_0, I_0) , dimana $S_0 + I_0 = N$, diberikan oleh :

$$\begin{aligned}
S + I - \rho \ln S &= C = S_0 + I_0 - \rho \ln S_0 \\
I &= S_0 + I_0 - \rho \ln S_0 - S + \rho \ln S \\
I &= N - S + (\rho \ln S - \rho \ln S_0) \\
I &= N - S + \rho(\ln S - \ln S_0) \\
I &= N - S + \rho \ln \frac{S}{S_0} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Nilai maksimum atau nilai infeksi puncak I_m terjadi saat $S = \rho$, dimana $dI/dt = 0$. Dari persamaan (3.5) dengan $S = \rho$, maka:

$$\begin{aligned}
I_m &= \rho \ln \rho - \rho + S_0 + I_0 - \rho \ln S_0 \\
&= S_0 + I_0 - \rho + (\rho \ln \rho - \rho \ln S_0) \\
&= N - \rho + \rho \ln(\rho/S_0)
\end{aligned}$$

Nilai variabel $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ non negatif dan memenuhi $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Ketika $S(t)$ terbatas dan monoton turun maka $S(\infty)$ ada. Variabel $I(t)$ bertambah untuk $S > \rho$ dan berkurang untuk $S < \rho$. Jadi untuk semua nilai yang mungkin $S(\infty)$, $I(t)$ adalah monoton dan terbatas sehingga $I(\infty)$ ada.

Selanjutnya akan dicari nilai $S(\infty)$. Dari persamaan (3.1) dengan $t \rightarrow \infty$ akan diperoleh nilai $S(\infty)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta IS \\
\int \frac{dS}{dt} &= \int -\beta IS \\
\ln S \Big|_{t=0}^{t=\infty} &= -\beta \int_0^{\infty} I(t) dt \\
\ln S(\infty) - \ln S(0) &= -\beta \int_0^{\infty} I(t) dt \\
\ln \left[\frac{S(\infty)}{S(0)} \right] &= -\beta \int_0^{\infty} I(t) dt \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.6) di atas, jika batasan populasi terinfeksi $I(\infty)$ adalah positif, maka $S(\infty)$ harus sama dengan 0, dan hal ini akan membantah persamaan (3.5). Jadi nilai $I(\infty)$ yang mungkin ialah $I(\infty) = 0$, dan dari persamaan (3.5) besarnya $S(\infty)$ adalah akar terkecil dari:

$$N - S(\infty) + \rho \log[S(\infty)/S_0] = 0$$

Dapat dikatakan bahwa ruang dari solusi bagian dalam bidang SI selalu sama untuk ρ yang pasti dan selalu memiliki suatu infeksi maksimum saat $S = \rho$. Kurva dari nilai S dan I dapat menjadi naik atau turun sehingga akan melalui titik (S_0, I_0) .

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.1), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\
\frac{dS}{dt} &= -\beta S \left[N - S + \rho \log(S/S_0) \right]
\end{aligned}$$

sehingga laju perubahan S terhadap waktu atau laju perjalanan sepanjang jalur solusi SI adalah sebagai suatu fungsi dari β dan ρ untuk titik awal (S_0, I_0) yang diberikan.

Kemudian, dengan menggunakan persamaan (3.5) dan persamaan bahwa $N = S + I + R$ maka kelas *removal* $R(t)$ diberikan oleh:

$$R(t) = \int_0^t \mathcal{A}(\tau) d\tau = -\rho \log[S/S_0].$$

4.1.1 Analisis Titik Tetap

Lebih jauh akan dianalisis dalam kondisi yang seperti apa populasi individu *infected* pada saat $t \rightarrow \infty$. Kondisi ini dapat dianalisa misalnya dengan menentukan titik kesetimbangan (titik tetap) dari persamaan pertumbuhan populasi *susceptible* dan populasi *infected*. Titik tetap diperoleh saat masing-masing persamaan pertumbuhan populasi mencapai nilai nol atau pada saat terjadi “zero growth rate”. Berikut ini akan dicari titik tetap dari persamaan pertumbuhan populasi *susceptible* dan populasi *infected*.

- Buat persamaan (3.1) sama dengan nol

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0 \\ -\beta IS &= 0 \\ -\beta IS &= 0 \\ S_0^* &= 0 \text{ atau } I_1^* = 0 \end{aligned}$$

- Substitusi $S_0^* = 0$ ke persamaan $\frac{dI}{dt} = 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \beta IS - \gamma I &= 0 \\ \beta I(0) - \gamma I &= 0 \\ -\gamma I &= 0 \\ I_0^* &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, dari $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $S_0^* = 0$ diperoleh satu titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$.

- Substitusi $I_1^* = 0$ ke persamaan $\frac{dI}{dt} = 0$, maka diperoleh:

$$\beta IS - \gamma I = 0$$

$$\beta IS = \gamma I$$

$$S = \frac{\gamma I}{\beta I}$$

$$S_1^* = \frac{\gamma}{\beta}$$

Jadi, dari $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $I_1^* = 0$ diperoleh satu titik tetap $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$.

Disini jelas terlihat bahwa terdapat dua titik tetap pada kedua persamaan pertumbuhan populasi *susceptible* dan populasi *infected*, yaitu :

$$1) \quad P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa dalam keadaan setimbang, jumlah populasi *susceptible* = jumlah individu *infected* = 0.

$$2) \quad P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa saat populasi *susceptible* sama dengan laju *removal* relatif ($\rho = \gamma/\beta$) maka populasi *infected* akan sama dengan 0.

4.1.2 Keberadaan Titik Tetap

Dari persamaan (3.2) dapat disimpulkan bahwa agar tercapai kondisi tidak terjadi peningkatan jumlah terinfeksi, I , maka haruslah :

$$S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \leq 0$$

Maka diperoleh *threshold* atau ambang batas epidemik :

$$S_0 \leq \rho, \text{ dengan } \rho = \frac{\gamma}{\beta} \quad (3.7)$$

Sehingga :

- Jika $S_0 > \rho$, maka terjadi peningkatan jumlah terinfeksi (terjadi epidemik).
- Jika $S_0 \leq \rho$, maka tidak terjadi peningkatan jumlah terinfeksi (tidak terjadi epidemik).

Keberadaan titik endemik juga dipengaruhi oleh *basic reproductive ratio* (R_0) seperti yang terlihat pada 3.1.3.

4.1.3 Reproductive Ratio (R_0)

Agar tercapai kondisi yang bebas epidemik maka haruslah :

$$S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \leq 0$$

Untuk memperoleh nilai *basic reproductive ratio* (R_0), maka dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S_0 - \frac{\gamma}{\beta} &\leq 0 \\ S_0 &\leq \frac{\gamma}{\beta} \\ \frac{\beta S_0}{\underbrace{\gamma}_{R_0}} - 1 &\leq 0 \dots \dots \dots (*) \end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh nilai *basic reproductive ratio*:

$$R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma},$$

dimana R_0 adalah *basic reproductive ratio* suatu infeksi, yaitu jumlah infeksi – infeksi berikutnya diperoleh dari satu infeksi utama terhadap populasi *susceptible*. Rata – rata periode infeksi adalah $\frac{1}{\gamma}$.

Jika terdapat lebih dari satu infeksi berikutnya yang dihasilkan dari satu infeksi utama maka berarti $R_0 > 1$, yang menunjukkan bahwa terjadi epidemik.

Infeksi terjadi jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Akan dibuktikan jika $R_0 > 1$ maka

$$I(t) > I_0.$$

$$\begin{aligned} R_0 &> 1 \\ \frac{\beta S_0}{\gamma} &> 1 \\ \beta S_0 &> \gamma \\ \beta S_0 - \gamma &> 0 \dots \dots \dots (**) \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (**) dan persamaan (3.2) dapat disimpulkan :

$$I(t) > I_0$$

Dengan menggunakan persamaan (*) juga berarti bahwa kondisi $R_0 > 1$ ekuivalen dengan

$$S_0 > \rho.$$

4.1.3 Analisis Kestabilan pada Titik Tetap

Misalkan persamaan (3.1) dinotasikan dengan F_1 dan persamaan (3.2) dinotasikan dengan

F_2 . Maka bentuk matriks jacobian dari sistem persamaan diferensial di atas adalah :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

1. Kasus $R_0 < 1$

a) Uji kestabilan di titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$

Substitusikan nilai $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$ ke persamaan (3.8), diperoleh matriks

$$\text{jacobian : } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Dimana : * $a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$a_1 = -(m_{11} + m_{22}) = -(0 - \gamma) \\ = \gamma > 0$$

$$a_2 = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = ((0)(-\gamma) - (0)) \\ = 0$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $(S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$ tidak stabil.

b) Uji kestabilan di titik tetap $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$

Substitusikan nilai $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ ke persamaan (3.8), diperoleh matriks

$$\text{jacobian : } M = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Dimana : * $a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$a_1 = -(m_{11} + m_{22}) = -(0 + 0) \\ = 0$$

$$a_2 = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = ((0)(0) - (-\gamma(0))) \\ = \gamma > 0$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ tidak stabil.

2. Kasus $R_0 > 1$

a) Uji kestabilan di titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$

Substitusikan nilai $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = (0, 0)$ ke persamaan (3.8), diperoleh matriks

$$\text{jacobian : } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

$$\text{Dimana : } * a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil

bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$a_1 = -(m_{11} + m_{22}) = -(0 - \gamma) \\ = \gamma > 0$$

$$a_2 = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = ((0)(-\gamma) - (0)) \\ = 0$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $(S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$ tidak stabil.

b) Uji kestabilan di titik tetap $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$

Substitusikan nilai $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ ke persamaan (3.8), diperoleh matriks

$$\text{jacobian : } M = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

$$\text{Dimana : } * a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil

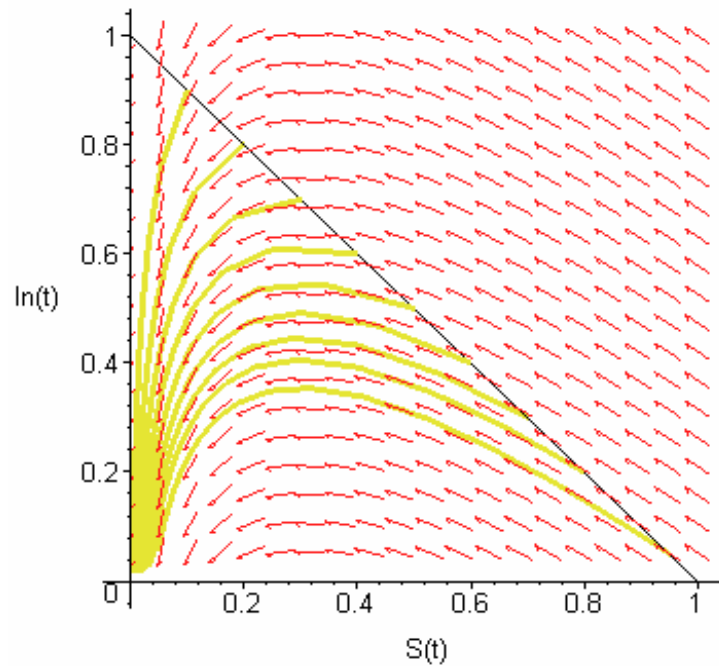
bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22}) = -(0 + 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = ((0)(0) - (-\gamma(0))) \\ &= \gamma > 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ tidak stabil.



Gambar 3.1. Solusi sistem persamaan diferensial model penyebaran penyakit menular tanpa adanya faktor demografi.

Pada Gambar 3.1, dengan memasukkan nilai – nilai parameter $\gamma = 3$, $\beta = 10$, dan beberapa nilai S_0 dapat terlihat pada akhirnya populasi *infected* menuju 0.

4.2 Model Epidemik dengan Faktor Demografi

Pertama-tama pada model penyebaran epidemik SIR dengan faktor demografi diperkenalkan tiga kelas dari populasi N individu pada waktu t , yaitu: $S(t)$ – jumlah individu yang *susceptible*

$I(t)$ – jumlah individu yang *infected*

$R(t)$ – jumlah individu yang *removal*

Misalkan laju kelahiran individu baru sebagai B dan laju kematian sebagai μ pada masing - masing kelas. Persamaan diferensial model penyebaran epidemik dengan menambahkan faktor demografi menjadi :

$$S'(t) = B - \beta IS - \mu S \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta IS - \gamma I - \mu I \\ &= \beta IS - I(\gamma + \mu) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$R'(t) = \gamma I - \mu R \quad (3.11)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0.$$

Dimana : $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

4.2.1 Analisis Titik Tetap

Lebih jauh akan dianalisis dalam kondisi yang seperti apa populasi individu *infected* pada saat $t \rightarrow \infty$. Mengingat $\frac{dR}{dt} = 0$ redundant karena R tidak muncul pada kedua persamaan lainnya, maka titik tetap diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$. Berikut ini akan dicari titik tetap dari persamaan pertumbuhan populasi *susceptible* dan populasi *infected*.

- Buat persamaan (3.10) sama dengan nol

$$\begin{aligned} \beta IS - (\gamma + \mu)I &= 0 \\ I(\beta S - \gamma - \mu) &= 0 \\ I_0^* = 0 \text{ atau } S_1^* &= \frac{\gamma + \mu}{\beta} \end{aligned}$$

- Substitusi $I_0^* = 0$ ke persamaan $\frac{dS}{dt} = 0$

$$B - \beta(0)S - \mu S = 0$$

$$B - \mu S = 0$$

$$S_0^* = \frac{B}{\mu}$$

Dari $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $I_0^* = 0$ diperoleh satu titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$.

- Substitusi $S_1^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$ ke persamaan $\frac{dS}{dt} = 0$

$$B - \mu S = \beta IS$$

$$\frac{1}{\beta}(B - \mu S) = IS$$

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S} - \mu\right) = I$$

$$I_1^* = \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)$$

Dari $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $S_1^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$ diperoleh satu titik tetap

$$P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)\right).$$

Disini jelas terlihat bahwa terdapat dua titik tetap pada kedua persamaan pertumbuhan populasi *susceptible* dan populasi *infected*, yaitu :

$$1). \quad P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa dalam keadaan populasi *susceptible* sama dengan jumlah populasi maka populasi *infected* sama dengan 0. Titik ini merupakan titik non – endemik.

$$2). \quad P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)\right) \quad (3.12)$$

Titik tetap ini merupakan titik tetap endemik.

Agar tercapai keadaan bebas infeksi, maka haruslah :

$$\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) \leq 0 \Rightarrow S_1^* \geq \frac{B}{\mu}$$

4.2.2 Keberadaan Titik Tetap

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa agar tercapai kondisi bebas infeksi, maka haruslah :

$$\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) \leq 0$$
$$S_1^* \geq \frac{B}{\mu}$$

Maka diperoleh *threshold* atau ambang batas epidemik:

$$S_1^* \geq \frac{B}{\mu} \tag{3.13}$$

Sehingga :

- Jika $S_1^* < \frac{B}{\mu}$, maka terjadi epidemik (terjadi peningkatan jumlah populasi *infected*).
- Jika $S_1^* \geq \frac{B}{\mu}$, maka tidak terjadi epidemik (tidak terdapat populasi *infected*).

Keberadaan titik endemik juga dipengaruhi oleh *basic reproductive ratio* (R_0) seperti yang terlihat pada 3.2.3.

4.2.3 Reproductive Ratio (R_0)

Agar tercapai kondisi yang bebas epidemik maka haruslah :

$$S_1^* \geq \frac{B}{\mu}$$

Untuk memperoleh nilai *basic reproductive ratio* (R_0), maka dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$S_1^* \geq \frac{B}{\mu}$$

$$\frac{B}{\mu S_1^*} \leq 1, \text{ dimana } S_1^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$$

$$\underbrace{\frac{B\beta}{\mu(\gamma + \mu)}}_{R_0} - 1 \leq 0$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh nilai *basic reproductive ratio*:

$$R_0 = \frac{B\beta}{\mu(\gamma + \mu)},$$

dimana R_0 adalah *basic reproductive ratio* suatu infeksi, yaitu jumlah infeksi – infeksi berikutnya diperoleh dari satu infeksi utama terhadap populasi *susceptible*. Jika terdapat lebih dari satu infeksi berikutnya yang dihasilkan dari satu infeksi utama maka berarti $R_0 > 1$, yang menunjukkan bahwa terjadi epidemik.

Infeksi terjadi jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Akan dibuktikan jika $R_0 > 1$ maka $I(t) > I_0$.

$$\begin{aligned}
R_0 &> 1 \\
\frac{B\beta}{\mu(\gamma + \mu)} &> 1 \\
B\beta &> \mu(\gamma + \mu) \\
B &> \mu S_1^* \\
\frac{B}{S_1^*} - \mu &\dots\dots\dots(**)
\end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (**) dan persamaan (3.10) dapat disimpulkan :

$$I(t) > I_0$$

4.2.4 Analisis Kestabilan pada Titik Tetap

Misalkan persamaan (3.9) dinotasikan dengan F_1 dan persamaan (3.10) dinotasikan dengan

F_2 . Maka bentuk matriks jacobian dari sistem persamaan diferensial di atas adalah :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma - \mu \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Selanjutnya pengujian akan dilakukan dengan melihat dua buah kasus.

1. Kasus $R_0 < 1$

a) Uji kestabilan di titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0 \right)$

Substitusikan nilai $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0 \right)$ ke persamaan (3.14), diperoleh matriks

jacobian :
$$M = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{B\beta}{\mu} \\ 0 & \frac{B\beta}{\mu} - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Dimana : * $a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22}) = -\left(-\mu + \left(\frac{B\beta}{\mu} - (\gamma + \mu)\right)\right) \\ &= \frac{2\mu^2 + \mu\gamma}{\mu} - \frac{B\beta}{\mu} \\ &= 2\mu + \gamma - \frac{B\beta}{\mu} > 0 \\ a_2 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = \left(-\mu\left(\frac{B\beta}{\mu} - \gamma - \mu\right) - \left(-\frac{B\beta}{\mu}(0)\right)\right) \\ &= (-B\beta + \mu\gamma + \mu^2) > 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$ stabil lokal.

b) Uji kestabilan di titik tetap $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)\right)$

Substitusikan nilai $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)\right)$ ke persamaan (3.14),

diperoleh matriks jacobian :

$$M = \begin{bmatrix} -\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right) - \mu & -(\gamma + \mu) \\ \left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right) & (\gamma + \mu) - (\gamma + \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} & -(\gamma + \mu) \\ \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu\right) & 0 \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Dimana : * $a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22}) = -\left(-\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)}\right) \\ &= \frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = \left(\left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} \right) (0) - \left(-(\gamma + \mu) \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu \right) \right) \right) \\ &= (\gamma + \mu) \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu \right) < 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) \right)$ tidak

stabil.

2. Kasus $R_0 > 1$

a) Uji kestabilan di titik tetap $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0 \right)$

Substitusikan nilai $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$ ke persamaan (3.14), diperoleh matriks

$$\text{jacobian : } M = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{B\beta}{\mu} \\ 0 & \frac{B\beta}{\mu} - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

$$\text{Dimana : } * a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil

bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22}) = -\left(-\mu + \left(\frac{B\beta}{\mu} - (\gamma + \mu)\right)\right) \\ &= \frac{2\mu^2 + \mu\gamma}{\mu} - \frac{B\beta}{\mu} \\ &= 2\mu + \gamma - \frac{B\beta}{\mu} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = \left(-\mu\left(\frac{B\beta}{\mu} - \gamma - \mu\right) - \left(-\frac{B\beta}{\mu} (0)\right)\right) \\ &= (-B\beta + \mu\gamma + \mu^2) < 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_1 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{B}{\mu}, 0\right)$ tidak stabil.

b) Uji kestabilan di titik tetap $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta}\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu\right)\right)$

Substitusikan nilai $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) \right)$ ke persamaan (3.14),

diperoleh matriks jacobian :

$$M = \begin{bmatrix} -\left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) - \mu & -(\gamma + \mu) \\ \left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) & (\gamma + \mu) - (\gamma + \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} & -(\gamma + \mu) \\ \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu \right) & 0 \end{bmatrix}$$

yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Dimana : * $a_1 = -\text{trace}M = -(m_{11} + m_{22})$

$$* a_2 = \det M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

Dengan menggunakan Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz, sebuah titik tetap akan stabil

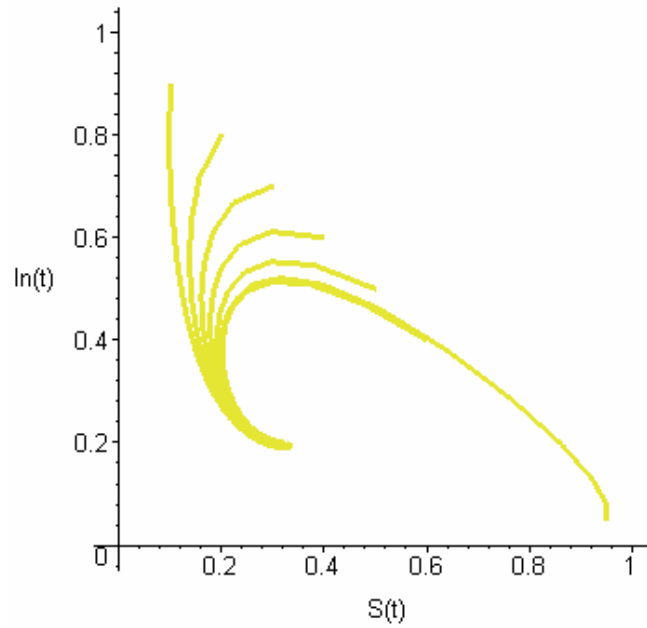
bila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga untuk nilai matriks jacobian M di atas, kita peroleh :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22}) = -\left(-\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} \right) \\ &= \frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = \left(\left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} \right) (0) - \left(-(\gamma + \mu) \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu \right) \right) \right) \\ &= (\gamma + \mu) \left(\frac{B\beta}{(\gamma + \mu)} - \mu \right) > 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan $P_2 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(\frac{B}{S_1^*} - \mu \right) \right)$ stabil.



Gambar 3.2. Solusi sistem persamaan diferensial dengan adanya faktor demografi untuk

$$\gamma = 3, \beta = 10, B = 0.8, \text{ dan } \mu = 0.2 .$$

Pada Gambar 3.2, dengan memasukkan nilai – nilai parameter $\gamma = 3, \beta = 10, B = 0.8,$ dan $\mu = 0.2$ diperoleh $R_0 = 12.5 > 1$. Sehingga diperoleh titik keseimbangan endemik ialah $S_1^* = 0.32, I_1^* = 0.23,$ dan $R_1^* = 0.45,$ yang menunjukkan kekonvergenan ke titik keseimbangan tersebut untuk waktu yang lama.

Model dengan vaksinasi

Model vaksinasi diberikan oleh

$$S'(t) = -\beta IS - \alpha,$$

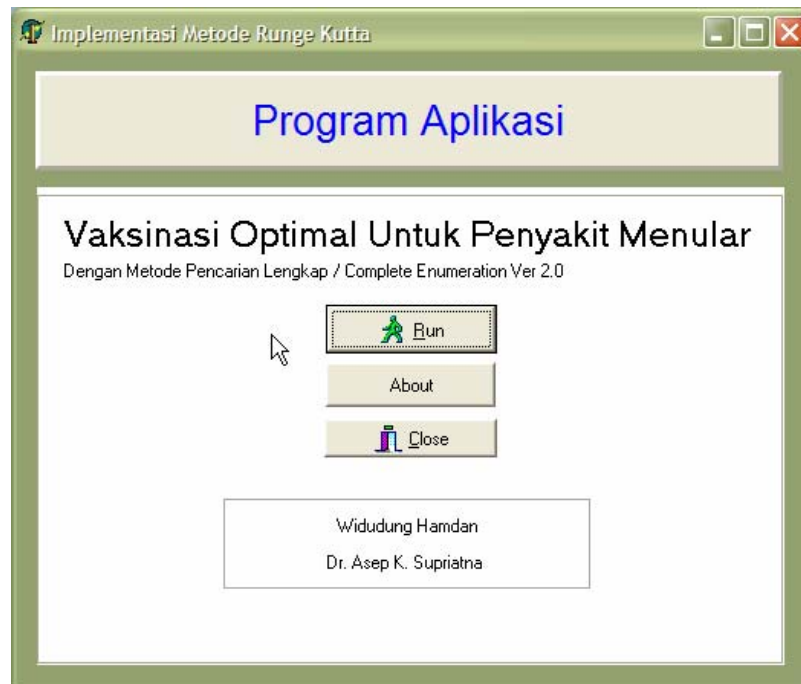
$$I'(t) = \beta IS - \gamma I,$$

$$R'(t) = \gamma I'$$

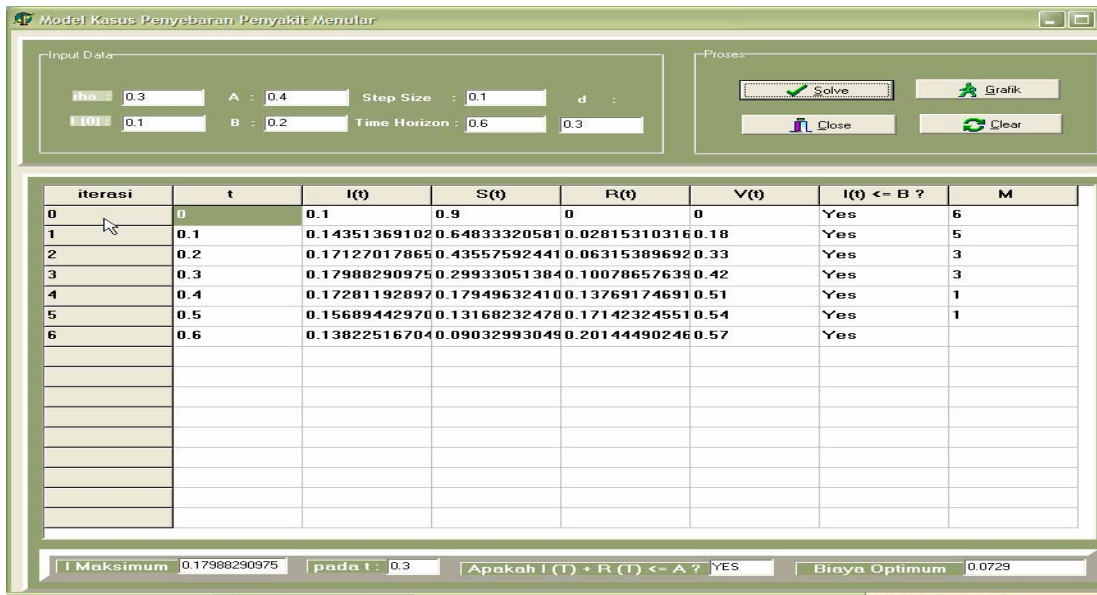
$$V'(t) = \alpha$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = V(0) = 0,$$

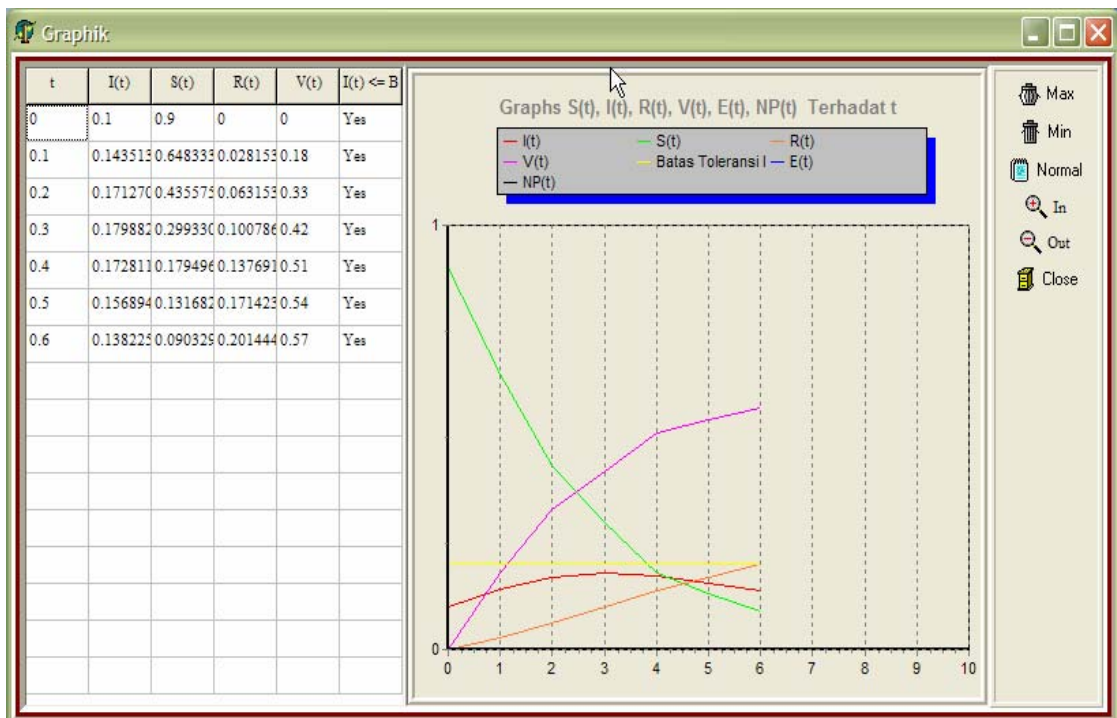
Model di atas diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metoda Runge-Kutta untuk mencari nilai-nilai vaksinasi yang optimal (α). Sebuah program komputer telah dikembangkan seperti terlihat di bawah ini.



Output dari program di atas memperlihatkan nilai vaksinasi optimal (M) yang meminimalkan fungsi biaya $C(\alpha) = \sum_{j=0}^T (M_j d\Delta)^2$ dengan konstrain (i) $R(T)+I(T) \leq A$ dan (ii) $I(t) \leq B$ untuk setiap waktu sampai dengan horizon waktu T . Output tersebut ditunjukkan pada gambar dibawah ini untuk $T=0.6$ satuan waktu (6 perioda vaksinasi), dan dihasilkan barisan vaksinasi optimal 6,5,3,3,1,1.



Sedangkan dinamika populasi setelah diberikan vaksinasi tersebut dapat dilihat pada gambar berikut



V1. KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini telah dikembangkan sebuah model matematika dan software untuk menentukan tingkat vaksinasi optimal. Se jauh ini analisis yang telah dilakukan untuk memperoleh tingkat vaksinasi optimal ini masih menggunakan asumsi penyebaran penyakit tanpa perantara, yakni dari satu manusia ke manusia yang lainnya. Dalam hal penyakit ditularkan melalui vector, seperti halnya penyakit demam berdarah yang ditularkan nyamuk, model ini masih belum realistic. Untuk itu penelitian lanjutan masih diperlukan dengan melibatkan vector perantara dalam penyebaran penyakit yang diteliti. Secara garis besar, penelitian lanjutan yang harus dilakukan meliputi:

- Melanjutkan analisis model dengan melibatkan penyebaran yang melalui vektor (khususnya model demam berdarah, dengan vektor nyamuk)
- Mencari solusi model dengan menggunakan teknik lainnya yang lebih efektif dan efisien, misalnya pemograman dinamis
- Menentukan solusi global, misalnya melalui pemograman konveks

DAFTAR PUSTAKA

1. Abual-Rub, M.S. (2000). Vaccination in a Model of an Epidemic. *Internat. J. Math. & Math.Sci.* **23**, No. 6 :425-429.
2. Beneson, A.S. (1990). Control of communicable diseases in man. Washington DC: American Public Health Association.
3. Bhamarapravati, N. & Y. Sutee (2000). *Vaccine* 18: 44-47.
4. Clarke, T. (2002). Breakbone Fever. *Nature* 416: 672-674.
5. Diekmann, O. & J.Heesterbeek (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. John Wiley.
6. Focks DA, E Daniels, DG Haile and JE Keesling. 1995. A simulation model of the epidemiology of urban dengue fever: literature analysis, model development, preliminary validation and samples of simulation results. *Am. J. Med. Hyg.* **53**:489-506.
7. Gubler, DJ and GC Clark. 1995. Dengue/dengue hemorrhagic fever: the emergence of a global health problem. *Emerging Infectious Diseases* **1**:55-57.
8. Guzman, M.G. & G. Kouri (2002). Dengue: An Update. *The Lancet Infectious Diseases* **2**: 33-42.
9. Mangaraja DT. (1998). Pengendalian hayati larva *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* dengan menggunakan predator *Toxorhynchites amboinensis* 3. Penelitian Hibah Bersaing V/2 1997/1998.
10. Monath, T.P. (2002). *Vaccine* 20: 1004-1018.
11. Patz JA, PR Epstein, TA Burke and JM Balbus. 1996. Global climate change and emerging infectious diseases. *JAMA* **275**:217-223.
12. Soewono, E. & A.K. Supriatna (2001). A Two-dimensional Model for Transmission of Dengue Fever Disease, *Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society* 24(1): 49-57.
13. Soewono, E & A.K. Supriatna. Dynamics of Dengue Fever Transmission with Vaccination. (to appear).
14. Soewono, E & A.K. Supriatna. Paradox of Vaccination Predicted by a Simple Host-Vector Epidemic Model. (to appear in an Indian Mathematical Journal).
15. Supriatna, A.K. & E. Soewono (2000). Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah, *Bionatura* 2(3): 104-116.

16. Supriatna, A.K. dan E. Soewono.(2003). Critical Vaccination level for Dengue Fever Disease Transmission. (Proceedings SEAMS Conference) : 208 - 217
17. Supriatna, A.K. & D. Mulianingtias. Pengaruh Parameter Demografi dan Parameter Epidemiologi dalam Penentuan Tingkat Vaksinasi Minimum . J. Teori & Terapan Mat. Vol 2 : 45 - 50
18. Supriatna, A.K. & E. Soewono (2003). Critical Vaccination level for Dengue Fever Disease Transmission. *2003 SEAMS GMU Proceedings of the International Conference on Mathematics and Its Applications*, 208-217.
19. Shulgin, B., L. Stone & Z. Agur (1998). Pulse Vaccination Strategy in SIR Epidemic Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60: 1123-1148.
20. Yang, H.M.& A.S.B. Silveira (1998). The Lost of Immunity in Directly Transmitted Infections Modelling: Effects on the Epidemiological Parameters. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60: 355-372.