Aplikasi Metoda Numerik Runge-Kutta dalam Pengembangan Software Penentuan Vaksinasi Optimal Penyakit Menular

N. Anggriani, A.K. Supriatna, Widudung

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Padjadjaran

Abstrak

Salah satu pencegahan penyakit menular adalah dengan pelaksanaan vaksinasi. Idealnya pelaksanaan vaksinasi harus menjamin tidak ada lagi penyebaran penyakit tersebut. Hal ini dapat dilakukan apabila tingkat vaksinasi cukup besar, artinya apabila sumber dana untuk pelaksanaan vaksinasi tersedia dengan jumlah yang cukup besar. Namun, realitanya, biasanya sumber dana terbatas. Dalam makalah ini di bahas bagaimana menentukan tingkat vaksinasi optimal yang dapat meminimumkan biaya. Sebuah software untuk keperluan itu juga dikembangkan. Perhitungan dinamika populasi yang dilakukan dalam software tersebut menggunakan metoda Runge-Kutta.

Pendahuluan

Model tanpa vaksinasi

Perhatikan sebuah populasi dengan N individu yang setiap saat terbagi menjadi tiga kompartemen:

S(t), jumlah individu yang rentan terhadap infeksi, tetapi belum terinfeksi

I(t), jumlah individu yang telah terinfeksi

R(t), jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi, dan bersifat immune serta tidak menularkan lagi.

Persamaan yang menggambarkan ketiga kompartemen tersebut adalah

$$\begin{aligned}
&S'(t) = -\beta IS, \\
&I'(t) = \beta IS - \gamma I, \\
&R'(t) = \gamma I' \\
&S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0,
\end{aligned}$$

Dalam hal ini β merupakan laju infeksi, $S < \rho$ adalah laju kesembuhan, dan S_0 serta I_0 merupakan jumlah awal individu rentan dan terinfeksi.

Untuk menganalisis model dilakukan cara sebagai berikut. Bagi persamaan kedua dengan yang pertama, sehingga diperoleh

$$\frac{dI}{dS} = -1 + p / S$$

dimana $\rho = \gamma / \beta$ dinamakan laju removal relatif. Solusi dari persamaan di atas diperoleh dengan cara metoda pemisaha variabel, yakni

$$\varnothing(S, I) = S + I - \rho \log S = C$$

dengan C konstan. Dengan demikian orbit solusi pada bidang SI bergantung hanya kepada laju removal relatif ρ . Solusi yang melalui titik (S_o, I_o), dengan $S_o + I_o = N$, diberikan oleh

$$I = N - S = \rho \log(S / S_o).$$

Puncak maskimum I_m terjadi pada saat $S = \rho$, dan di titik ini $I_m = N - \rho + \rho \log(\rho / S_o)$.

Variabel-variabel $S(t), I(t)$, dan $R(t)$ adalah nonnegatif dan memenuhi $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Selanjutnya, karena $S(t)$ terbatas dan monoton turun, maka $S(\infty)$ ada. Variabel $I(t)$ naik untuk $S > \rho$ dan turun untuk $S < \rho$ .Dengan demikian untuk semua nilai yang mungkin dari $S(\infty), I(t)$ monoton dan terbatas, sehingga $I(\infty)$ ada. Lebih jauh lagi,

$$\log[S(\infty) / S_o] = -\beta \int_o^\infty I(t) dt,$$

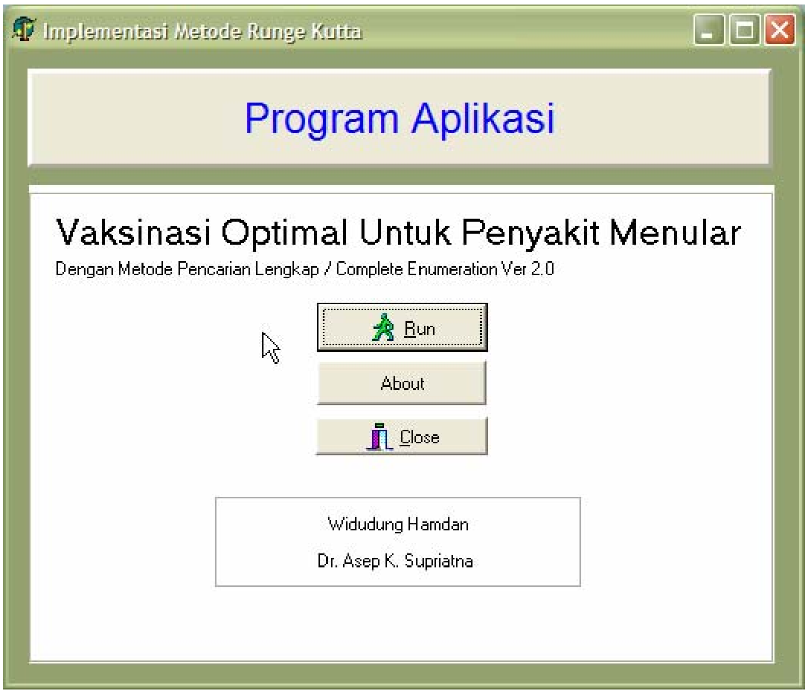
Jika nilai $I(\infty)$ positif, maka $S(\infty)$ harus nol; Ini bertentangan dengan persamaan sebelumnya. Dengan demikian $I(\infty) = 0$ $S(\infty)$ adalah akar terkecil dari $N - S(\infty) + \log[S(\infty) / S_o] = 0$.

Model dengan vaksinasi

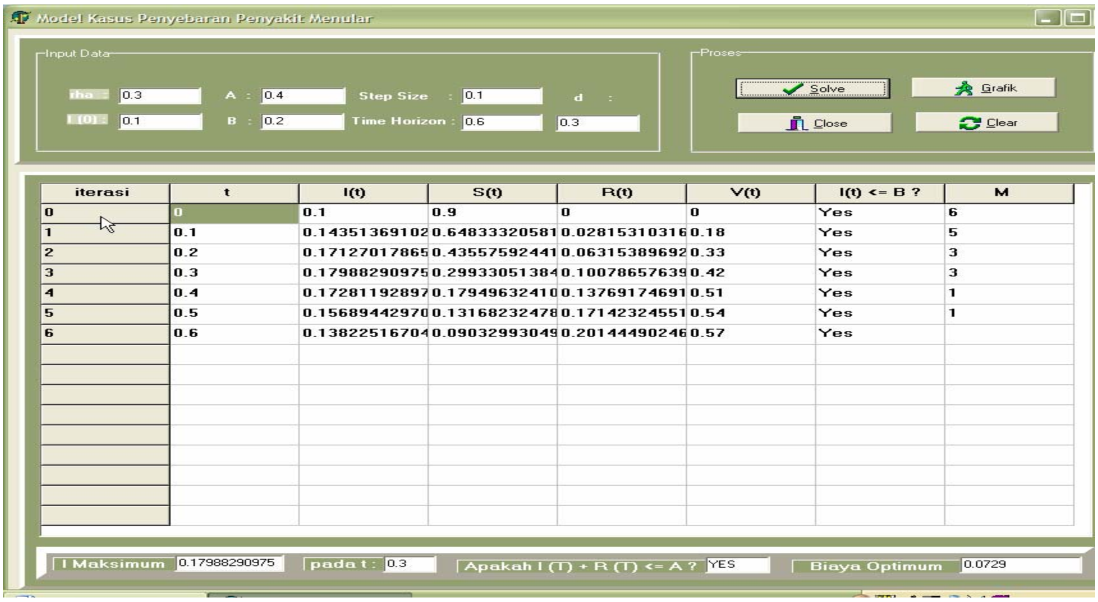
Model vaksinasi diberikan oleh

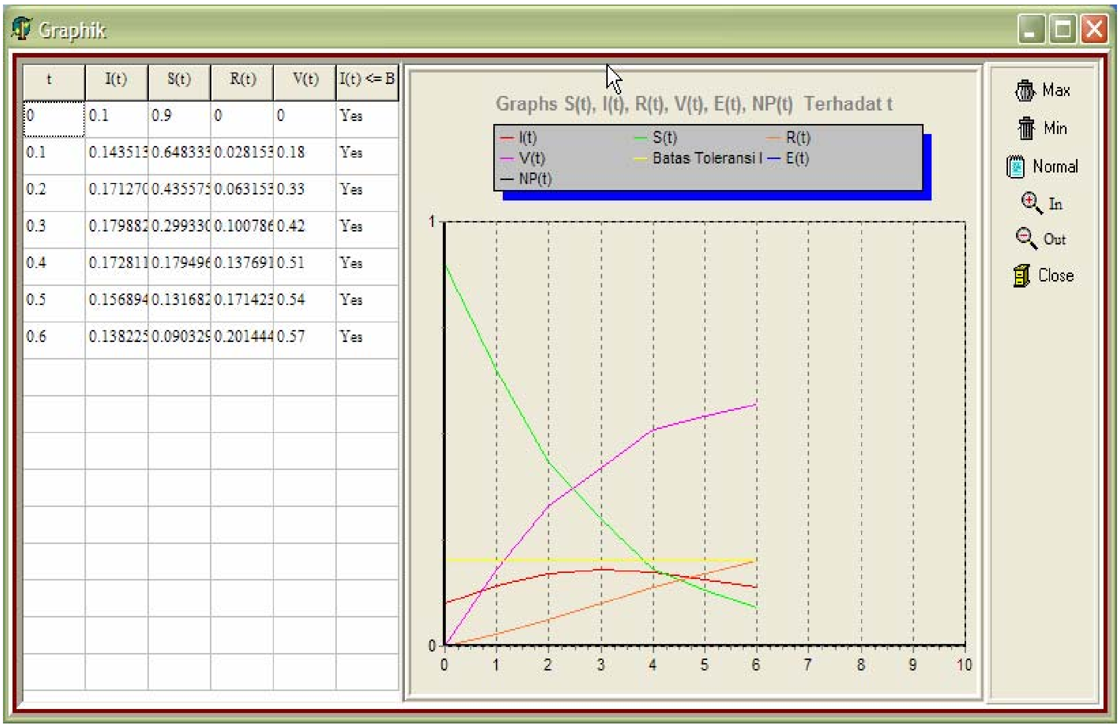
$$\begin{aligned}
&S'(t) = -\beta IS - \alpha, \\
&I'(t) = \beta IS - \gamma I, \\
&R'(t) = \gamma I' \\
&V'(t) = \alpha \\
&S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = V(0) = 0,
\end{aligned}$$

Model di atas diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metoda Runge-Kutta untuk mencari nilai-nilai vaksinasi yang optimal (α). Sebuah program komputer telah dikembangkan seperti terlihat di bawah ini.



Output dari program di atas memperlihatkan nilai vaksinasi optimal (M) yang meminimalkan fungsi biaya $C(\alpha) = \sum_{j=0}^{T} \left(M_j d\Delta \right)^2$ dengan konstrain (i) $R(T)+I(T)<=A$ dan (ii) $I(t)<=B$ untuk setiap waktu sampai dengan horizon waktu T. Output tersebut ditunjukkan pada gambar dibawah ini untuk T=0.6 satuan waktu (6 perioda vaksinasi), dan dihasilkan barisan vaksinasi optimal 6,5,3,3,1,1.


Model Kasus Penyebaran Penyakit Menular
Input Data
rha : 0.3
I (0) : 0.1
A : 0.4
B : 0.2
Step Size : 0.1
Time Horizon : 0.6
d :
0.3
Proses
Solve
Grafik
Close
Clear
iterasi | t | I(t) | S(t) | R(t) | V(t) | I(t) <= B ? | M
0 | 0 | 0.1 | 0.9 | 0 | 0 | Yes | 6
1 | 0.1 | 0.14351369102 | 0.64833320581 | 0.02815310316 | 0.18 | Yes | 5
2 | 0.2 | 0.17127017865 | 0.43557592441 | 0.06315389692 | 0.33 | Yes | 3
3 | 0.3 | 0.17988290975 | 0.29933051384 | 0.10078657639 | 0.42 | Yes | 3
4 | 0.4 | 0.17281192897 | 0.17949632410 | 0.13769174691 | 0.51 | Yes | 1
5 | 0.5 | 0.15689442970 | 0.13168232478 | 0.17142324551 | 0.54 | Yes | 1
6 | 0.6 | 0.13822516704 | 0.09032993049 | 0.20144490246 | 0.57 | Yes
I Maksimum 0.17988290975
pada t : 0.3
Apakah I (T) + R (T) <= A ? YES
Biaya Optimum 0.0729


Graphik
t | I(t) | S(t) | R(t) | V(t) | I(t) <= B
0 | 0.1 | 0.9 | 0 | 0 | Yes
0.1 | 0.143513 | 0.648333 | 0.028153 | 0.18 | Yes
0.2 | 0.171270 | 0.435575 | 0.063153 | 0.33 | Yes
0.3 | 0.179882 | 0.299330 | 0.100786 | 0.42 | Yes
0.4 | 0.172811 | 0.179496 | 0.137691 | 0.51 | Yes
0.5 | 0.156894 | 0.131682 | 0.171423 | 0.54 | Yes
0.6 | 0.138225 | 0.090329 | 0.201444 | 0.57 | Yes
Graphs S(t), I(t), R(t), V(t), E(t), NP(t) Terhadat t
I(t)
S(t)
R(t)
V(t)
Batas Toleransi I
E(t)
NP(t)
Max
Min
Normal
In
Out
Close