***Matematika Integratif* 3(1) tahun 2004**

Konstruksi Persamaan Perbaikan Produksi Melalui Sistem Dinamis

Asep K. Supriatna

Jurusan Matematika, Universitas Padjadjaran, Bandung

Jatinangor, Km 21 Bandung- Sumedang, 45363

&

Hennie Husniah

Jurusan Teknik Industri, Universitas Langlangbuana, Bandung

Abstrak

Dalam makalah ini akan dibahas masalah kurva pembelajaran pada proses industri, yang biasa dikenal dengan nama *learning curve* atau *manufacturing progress curve*. Sebuah persamaan yang dapat menggambarkan proses pembelajaran ini akan diturunkan dengan memodifikasi persamaan diferensial logistik. Penurunan persamaan ini berbeda dengan yang biasa dilakukan dalam beberapa literatur *industrial engineering*. Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa solusi dari persamaan diferensial tersebut merupakan sebuah persamaan yang dapat menggambarkan proses pembelajaran

Abstract

In this paper we discuss a *learning curve* or *manufacturing progress curve* of an industrial process. An equation describing this process will be derived by solving a modified logistic differential equation. This derivation is slightly different to that usually done in many industrial engineering literatures. It is shown that the solution to this modified equation satisfies all properties needed by a manufacturing learning curve.

Pendahuluan

Dalam berbagai bidang industri dikenal sebuah fenomena dimana apabila jumlah suatu produk berlipat, maka rata-rata waktu yang diperlukan untuk membuat per satuan produk tersebut berkurang. Hal ini salah satunya dikarenakan adanya proses pembelajaran, yang berakibat dengan berjalannya waktu maka berbagai faktor yang menghambat proses produksi pada industri tersebut dapat diatasi. Istilah lain yang banyak dipakai untuk menggambarkan fenomena ini adalah "*learning curve*", "*experience curve*", "*learning by doing*" atau "*learning by use*" (Argote dkk, 1990). Dampak pembelajaran tersebut untuk pertama kalinya, secara matematis dipelajari oleh Wright (1936) dengan mempelajari berbagai faktor yang dapat mempengaruhi biaya pembuatan pesawat terbang. Dalam paper ini akan dibahas ulang model Wright tersebut. Selain itu juga akan dibahas sebuah pendekatan alternatif.

Alternatif lain yang eqivalen untuk menggambarkan performance produksi adalah dengan menggambarkan grafik jumlah kesalahan atau biaya per unit produk terhadap waktu atau jumlah produk, yang secara teoritis akan mempunyai bentuk yang sama dengan grafik waktu produksi per unit produk terhadap banyaknya produk. Melalui pendekatan sistem dinamis, yakni dengan melihat laju perubahan kesalahan produksi, dalam paper ini akan dibuat suatu model yang dapat menggambarkan apakah terjadi pembelajaran (perbaikan produksi) atau tidak dalam suatu proses produksi.

Model Kurva Perbaikan Produksi Wright

Pengamatan yang dilakukan Wright (1936) memperlihatkan bahwa biaya yang diperlukan untuk membuat sebuah pesawat terbang berkurang sebesar 20% setiap produksi berlipat dua dari sebelumnya. Dalam model yang dikembangkannya, Wright berasumsi bahwa "apabila jumlah suatu produk berlipat dua, maka rata-rata waktu yang diperlukan untuk membuat per satuan produk tersebut berkurang sebesar *b*%". Dari asumsi tersebut dapat diturunkan pernyataan-pernyataan matematis berikut.

Misalkan $T(n)$ adalah waktu yang diperlukan untuk membuat produk ke-n. Dari asumsi tersebut dapat disimpulkan bahwa waktu yang diperlukan untuk menghasilkan produk ke $i=2^n$, (n=0,1,2,3, …) adalah

$$T(2^n) = T(1)a^n, \qquad 1$$

dengan a=1-b/100. Rumus tersebut hanya berlaku untuk bilangan yang merupakan perpangkatan dari 2. Untuk memperumum rumus di atas, maka persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk

$$T(x) = T(1)a^{\log_2 x}. \qquad 2$$

Dengan mengambil logaritmanya maka diperoleh

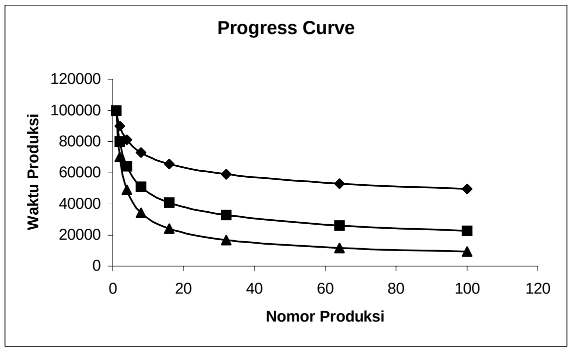
$$\log_2 T(x) = \log_2(T(1)) + \log_2 x \log_2 a = \log_2(T(1)) + \log_2 x^{\log_2 a}$$

$$\log_2 T(x) = \log_2(T(1)x^{\alpha})$$

atau

$$T(x) = T(1)x^{\alpha} \qquad 3$$

dengan $\alpha = \log_2 a$. Persamaan terakhir ini dinamakan persamaan perbaikan produksi yang juga dikenal dengan nama *manufacturing progress curve*. Karena $0 \le a \le 1$, maka kurva $T(x)$ berupa kurva eksponen negatif, seperti tampak pada gambar 1.



Gambar 1: Kurva perbaikan produksi dengan derajat perbaikan dari atas ke bawah masing-masing 10%, 20% dan 30%.

Sebuah kelemahan dari model di atas dapat dijelaskan sebagai berikut. Karena $\alpha < 0$ maka $\lim_{x \to \infty} T(x) = \lim_{x \to \infty} T(1)x^{\alpha} = 0$, artinya apabila jumlah produksi sangat besar maka tidak diperlukan waktu untuk menghasilkan produk terakhir tersebut. Jelas hal ini tidak realistik. Dalam hal ini persamaan perbaikan produksi tersebut dapat dimodifikasi menjadi lebih realistik, yakni

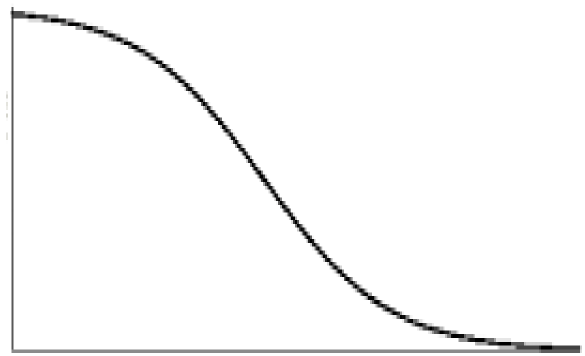
$$T(x) = T_c + T_0 x^{\alpha} \tag{4}$$

dengan T_c dan T_0 merupakan konstanta yang nilainya bergantung kepada data produksi. Dalam hal ini apabila jumlah produksi cukup banyak maka waktu yang diperlukan untuk memproduksi satu unit produk adalah konstan. Hal ini cukup realistik.

Namun, kalau diperhatikan kurva dari persamaan (4), yang merupakan translasi vertikal dari kurva persamaan (3) pada gambar 1, dapat disimpulkan bahwa efek pembelajaran terasa langsung di saat-saat awal. Bahkan efeknya jauh lebih besar di saat-saat awal dibandingkan di saat berikutnya. Hal ini juga tidak realistik mengingat pada kenyataannya dampak pembelajaran tersebut memerlukan waktu. Kurva yang lebih realistik adalah yang berbentuk mirip dengan hurup S terbalik. Berkaitan dengan hal ini, Banker dkk (1997) memberikan suatu alternatif untuk menggambarkan kurva perbaikan produksi tersebut dengan mempelajari hubungan antara laju kesalahan produksi dengan waktu sejak produksi dimulai.

Model Laju Kesalahan Produksi Banker

Misalkan $x=f(t)$ menunjukkan jumlah kesalahan produksi pada saat t. Grafik yang diharapkan dari x terhadap t adalah seperti pada gambar 2 berikut.



Gambar 2: Kurva laju kesalahan produksi terhadap waktu

Kurva seperti pada Gambar 2 dapat diperoleh apabila $dx/dt<0$ untuk setiap saat t. Selain itu nilai absolut dari dx/dt membesar secara perlahan pada saat awal, kemudian semakin

membesar dengan kecepatan perubahan yang membesar dan mencapai puncak di titik infleksi t_{inf}. Setelah itu nilai absolut dx/dt tersebut mengecil. Secara matematis, syarat cukup agar diperoleh kondisi di atas adalah

$$\frac{dx}{dt} \le 0, \quad \forall t \tag{5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \le 0, \quad t < t_{\text{inf}} \tag{6}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad t = t_{\text{inf}} \tag{7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \ge 0, \quad t > t_{\text{inf}} \tag{8}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} \ge 0, \quad \forall t \tag{9}$$

Persamaan (5)-(9) dapat dipakai sebagai kriteria untuk menentukan apakah dalam sebuah proses produksi terjadi pembelajaran atau tidak. Sebagai ilustrasi, misalnya Banker dkk (1997) mempelajari data tentang pengaruh team-work terhadap kualitas produksi dengan melihat banyaknya kesalahan yang terjadi secara longitudinal. Dari data ini dilakukan regresi polinom derajat 3, yakni

$$x = f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \tag{10}$$

Dengan menurunkan x terhadap t akan diperoleh $dx/dt = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2$, $d^2x/dt^2 = 2\gamma + 6\delta t$ dan $d^3x/dt^3 = 6\delta$. Kriteria terjadinya proses pembelajaran dapat ditentukan dengan melihat apakah kondisi (5)-(9) terpenuhi atau tidak, dengan t_{inf} merupakan akar dari persamaan $d^2x/dt^2 = 2\gamma + 6\delta t = 0$, yakni $t_{\text{inf}} = -\gamma/3\delta$.

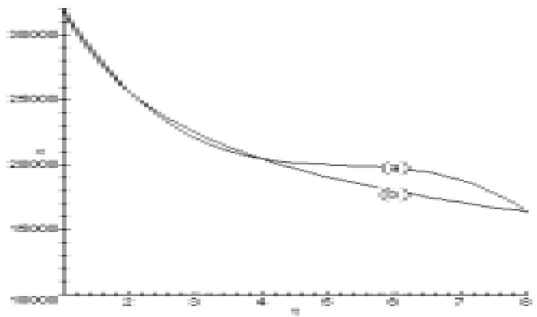
Penggunaan regresi terhadap polinom derajat 3 yang dilakukan Banker dkk bermanfaat untuk memperoleh model keberhasilan team-work dalam rentang waktu dimana data tersedia, tetapi mungkin tidak dapat diekstrapolasi. Sebuah *counter example* tentang penggunaan polinom derajat 3 untuk menggambarkan kurva perbaikan produksi akan diberikan oleh contoh hipotetis yang diambil dari Meyer (1984).

Soal no 14 halaman 21 pada buku Meyer meminta model fungsi kemajuan produksi untuk data berikut

Jumlah Produksi	1	2	4	8
Jam Pekerja	32000	25600	20480	16384

Jawaban untuk soal di atas adalah $T(x) = 32000x^{-0,322}$ dengan laju perbaikan produksi 20%. Akan tetapi apabila soal ini sedikit dimodifikasi, "jam pekerja" diganti dengan "banyaknya kesalahan", di mana keduanya menggambarkan fenomena yang sama, yakni perbaikan produksi, maka dengan menggunakan regresi polinom derajat 3 (leastsquare, Maple V) diperoleh persamaan $Y(x) = 294912/7 - 12288x + 2304x^2 - 1024/7x^3$. Kurva untuk kedua persamaan tersebut terlihat pada gambar 3. Kondisi (5)-(9) yang disyaratkan Banker dkk tidak terpenuhi (contohnya

$d^3x/dt^3 = -6(1024/7) < 0, \quad \forall t$). Bahkan untuk nilai x yang sangat besar $Y(x)$ bernilai negatif, yang sangat tidak realistik. Dalam bagian selanjutnya akan dibahas bagaimana mengkonstruksi suatu persamaan yang memenuhi kondisi (5)-(9) di atas melalui sistem dinamis.



Gambar 3: Kurva Banker (gambar a) dan kurva Wright (gambar b)

Persamaan Implisit Perbaikan Produksi

Dalam bagian ini perbaikan produksi akan dicirikan oleh penurunan jumlah kesalahan produksi. Kurva perbaikan yang diharapkan, seperti pada gambar 2, mirip dengan solusi persamaan diferensial logistik $dx/dt = ax - bx^2$ yang mempunyai dua solusi setimbang (*steady state solution*), yakni x=0 yang tidak stabil dan x=a/b yang stabil (Braun, 1982, hal. 29). Solusi lain dengan nilai awal x_0 ($0<x_0<a/b$) mempunyai trayektori seperti pada gambar 4c. Dengan ide yang sama kita dapat membuat persamaan diferensial untuk menggambarkan laju perubahan banyaknya kesalahan yang dibuat. Diasumsikan bahwa “dari waktu ke waktu banyaknya kesalahan berkurang dan perubahannya sebanding dengan kesalahan yang sudah dibuat”. Jika $x(t)$ menunjukkan banyaknya kesalahan pada waktu t, maka dinamik dari banyaknya kesalahan tersebut diberikan oleh

$$\frac{dx}{dt} = -ax\,. \qquad 11$$

Karena perubahannya sebanding dengan jumlah kesalahan, maka semakin banyak kesalahan perubahan semakin besar. Hal ini tidak kurang realistik karena tidak memuat faktor kejenuhan yang dapat meredam laju perubahan tersebut. Diasumsikan “bahwa faktor kejenuhan ini sebanding dengan kwadrat jumlah kesalahan”, sehingga dinamik dari jumlah kesalahan tersebut akan berbentuk

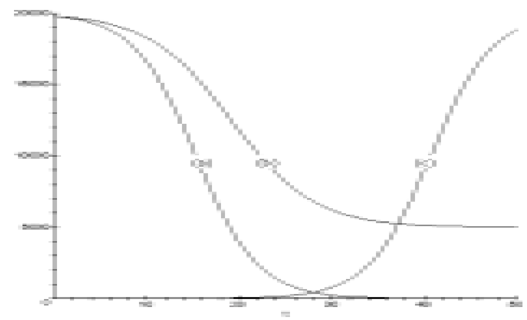
$$\frac{dx}{dt} = -ax + bx^2 \equiv f(x)\,. \qquad 12$$

Untuk melihat sifat solusi dari persamaan di atas akan dipelajari solusi setimbang (titik tetap) x=0 dan x=a/b yang diperoleh dari kondisi $f(x)$=0. Kestabilan dapat dilihat dengan memeriksa tanda dari $f'(x)$ di kedua titik ini, yakni $f'(0) = -a < 0$ dan $f'(a/b) = a > 0$, yang berarti x=0 stabil dan x=a/b tidak stabil (lihat Hale & Kocak, 1991, hal. 17-18 untuk definisi dan syarat kestabilan). Sehingga kurva solusi untuk nilai awal x_0 ($0<x_0<a/b$) seperti pada gambar 4a. Kurva ini terlalu ideal, karena pada akhirnya jumlah kesalahan akan nol. Untuk memperbaikinya kita lakukan langkah berikut.

Dengan mengikuti cara yang sama, kurva yang diinginkan harus merupakan kurva dari persamaan $x(t)$ yang merupakan solusi persamaan diferensial yang mempunyai titik tetap x=c yang stabil dan x=a/b yang tidak stabil. Kedua titik tetap berasal dari persamaan

$$\frac{dx}{dt} = (x-c)(bx-a) \equiv g(x)\,. \qquad 13$$

Kita klaim bahwa x=c stabil dan x=a/b tidak stabil apabila dipenuhi syarat $c<a/b$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut. Turunan pertama dari $g(x)$ adalah $g'(x) = 2bx - (a+bc)$, sehingga $g'(c) = 2bc - (a+bc) = bc - a < 0$ apabila $c<a/b$. Dengan alasan yang sama diperoleh $g'(a/b) = 2b(a/b) - (a+bc) = a - bc > 0$.



Gambar 4: Kurva logistik (gambar c), kurva laju kesalahan produksi dari persamaan 12 (gambar a) dan kurva laju kesalahan produksi dari persamaan 13 (gambar b).

Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa kondisi (5)-(9) yang diinginkan Banker dkk dipenuhi oleh persamaan x=$x(t)$ ini, apabila $0<c<x<a/b$, yakni:

$$\frac{dx}{dt} = (x-c)(bx-a) < 0, \quad \forall t \qquad 14$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2bx - (a+bc) < 0, \qquad t < t_{\inf} = \frac{a+bc}{2b} \tag{15}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2bx - (a+bc) = 0, \qquad t = t_{\inf} = \frac{a+bc}{2b} \tag{16}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2bx - (a+bc) > 0, \qquad t > t_{\inf} = \frac{a+bc}{2b} \tag{17}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2b > 0, \qquad \forall t \tag{18}$$

Jadi kurva yang dapat menggambarkan proses perbaikan produksi adalah kurva dari persamaan yang merupakan solusi dari persamaan diferensial (13) dengan $0<c<x<a/b$, seperti diperlihatkan pada gambar 4b.

Konstruksi Persamaan Perbaikan Produksi

Dalam bagian ini akan dicari persamaan perbaikan produksi secara eksplisit sebagai solusi dari persamaan diferensial (13) dengan

$$0 < c < x < a/b. \tag{19}$$

Apabila ruas kanan dari persamaan (13) tidak nol, maka persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{(x-c)(bx-a)} = dt. \tag{20}$$

Ruas kiri pada persamaan tersebut dapat diubah sehingga persamaan menjadi

$$\frac{1}{bc-a}\left(\frac{dx}{x-c} + \frac{-bdx}{bx-a}\right) = dt. \tag{21}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas maka diperoleh

$$\frac{1}{bc-a}\left(\ln|x-c| - \ln|bx-a|\right) = t + K_1, \tag{22}$$

Dengan K_1 merupakan konstanta integrasi. Selanjutnya persamaan ini dapat diubah sebagai berikut:

$$\ln|x-c| - \ln|bx-a| = \ln\left|\frac{x-c}{bx-a}\right| = (t+K_1)(bc-a), \tag{23}$$

atau

$$\left|\frac{x-c}{bx-a}\right| = e^{(t+K_1)(bc-a)}. \tag{24}$$

Selanjutnya karena syarat persamaan (19) harus dipenuhi dan dengan memisalkan $D = bc - a$ maka diperoleh

$$\frac{x-c}{a-bx} = e^{D(t+K_1)}, \tag{25}$$

atau

$$x - c = (a-bx)e^{D(t+K_1)}. \tag{26}$$

Dengan penulisan ulang diperoleh

$$x(1+be^{D(t+K_1)}) = ae^{D(t+K_1)} + c. \tag{27}$$

Dari persamaan terakhir dapat diperoleh bentuk eksplisit dari x sebagai fungsi dari t, yaitu

$$x = \frac{ae^{D(t+K_1)}+c}{1+be^{D(t+K_1)}} = \frac{ae^{Dt}e^{DK_1}+c}{1+be^{Dt}e^{DK_1}} = \frac{ae^{Dt}K_2+c}{1+be^{Dt}K_2}. \tag{28}$$

Konstanta K_2 dapat ditentukan dari nilai awal $x(0)=x_0$, yakni $K_2 = \frac{x_0-c}{a-bx_0}$. Perhatikan bahwa nilai $D<0$, sehingga $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan (28) merupakan persamaan eksplisit yang kita cari sebagai persamaan perbaikan produksi.

Kesimpulan

Dalam paper ini telah dikonstruksi sebuah model yang dapat menggambarkan proses perbaikan produksi yang mengakomodir "*learning process*" dengan memanfaatkan sifat-sifat sistem dinamis. Dengan menyederhanakan notasi secara umum persamaan perbaikan produksi akan berbentuk

$$x(t) = \frac{Ae^{-Bt}+C}{1+De^{-Bt}}, \tag{29}$$

Dengan A, B, C dan D konstanta-konstanta positif.

Referensi:

1. Argote, L., Beckman, S.L. and Epple, D. (1990). The Persistence and Transfer of Learning in Industrial Settings, *Management Science* Vol. 36 No. 2, pp. 140-154.
2. Banker, R.D, J.M. Field dan K.K. Sinha (1997). *Workteam Implementation and Trajectories of Manufacturing Quality: a Longitudinal Field Study*. Internet.
3. Braun, M. (1982). *Differential Equations and Theirs Applications*. Springer-Verlag, New York.
4. Dutton, J.M. and Thomas, A. (1984). Treating Progress Functions as a Managerial Opportunity, *Academy of Management Review* Vol. 9 No. 2, pp. 235-247.
5. Hale, J. & H. Kocak (1991). Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, New York.
6. Meyer, W.J. (1984). Concept of Mathematical Modeling. McGraw-Hill Int. Edn., Singapore.
7. Wright, T.P. (1936). Factors Affecting the Cost of Airplanes, *Journal of Aeronautical Sci*ence Vol. 3, p. 122.
8. Yelle, L.E. (1979). The Learning Curve: Historical Review and Comprehensive Survey, *Decision Sciences* Vol. 10, pp. 302 – 328.