

Tingkat Vaksinasi Minimum untuk Pencegahan Epidemik Berdasarkan Model Matematika SIR

Asep K. Supriatna

Abstrak

Dalam paper ini dibahas sebuah model SIR sederhana. Dari model ini dapat ditentukan *disease-free equilibrium* dan *endemic equilibrium*. Kedua equilibria ini diuji kestabilannya dengan menggunakan *neighbourhood stability analysis*. Tingkat vaksinasi minimum dapat ditentukan berdasarkan kestabilan dari *disease-free equilibrium*.

1 Pendahuluan

Model matematika sudah banyak digunakan sebagai alat bantu dalam memahami penyebaran penyakit menular. Salah seorang pendiri teori epidemiologi (seorang dokter) mengatakan bahwa “As a matter of fact all epidemiology, concerned as it is with variation of disease from time to time or from place to place, *must* (sic) be considered mathematically (...), if it is to be considered scientifically at all” (Ross, 1911, p.651).

Beberapa pertanyaan yang biasa dibahas dalam epidemiologi misalnya: Apakah penyebaran penyakit berakibat terjadinya epidemik? Jika terjadi epidemik, berapa laju pertambahan yang terserang penyakit selama epidemik tersebut? Berapa prosentase dari suatu populasi yang pada akhirnya terserang penyakit tersebut? Dsb. Kermak & McKendrick (1927) adalah beberapa diantara peneliti yang pertama menjawab pertanyaan tersebut melalui suatu model matematika dan menemukan *epidemic threshold equation* dan *final size equation*. Setelah itu makin banyak perhatian peneliti dalam masalah aspek matematis dari penyebaran penyakit menular tersebut, yang dikaitkan dengan berbagai kompleksitas. Beberapa diantaranya pada tahun-tahun terakhir ini adalah Esteva & Vargas (1998) yang membahas model SIR untuk penyakit demam berdarah, yang kemudian dikembangkan oleh Soewono & Supriatna (2001) untuk memperoleh apa yang dinamakan *early warning* untuk *outbreak* demam berdarah. Pada paper ini akan dibahas mengenai model SIR dan tingkat vaksinasi minimum dengan strategi vaksinasi konstan untuk pencegahan terjadinya epidemik. Strategi lainnya dapat dilihat pada Shulgin *et al.* (1998).

2 Model Matematika

Pandang sebuah populasi yang terbagi ke dalam tiga sub-populasi, yaitu sub-populasi susceptibles (S), sub-populasi Infectious (I) dan sub-populasi Recovered (R). Keseluruhan

populasi dinormalisasi sehingga $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. Laju kelahiran dan kematian dianggap sama, yaitu m . Laju infeksi susceptible adalah βI dengan β meunjukkan laju kontak. Setiap individu yang infectious akan sembuh dengan laju kesembuhan g .

$$\frac{dS}{dt} = m - (\beta I + m)S \equiv F(S, I, R), \quad 1$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - (m + g)I \equiv G(S, I, R), \quad 2$$

$$\frac{dR}{dt} = gI - mR \equiv H(S, I, R). \quad 3$$

2.1 Titik tetap untuk model SIR

Mengingat $\frac{dR}{dt}$ redundant karena R tidak muncul pada kedua persamaan lainnya, titik tetap

diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$. Dari $\frac{dI}{dt} = 0$ diperoleh $I_0^* = 0$ atau $S_1^* = \frac{m+g}{\beta}$. Dari $\frac{dS}{dt} = 0$

dan $I_0^* = 0$ diperoleh $S_0^* = 1$ yang memberikan *disease-free equilibrium*

$$(S_0^*, I_0^*) = (1, 0). \quad 4$$

Demikian pula dari $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $S_1^* = \frac{m+g}{\beta}$ diperoleh $I_1^* = \frac{m}{\beta} \left(\frac{1}{S_1^*} - 1 \right)$ yang memberikan

endemic equilibrium

$$(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{m+g}{\beta}, \frac{m}{\beta} (R_0 - 1) \right), \quad 5$$

dengan

$$R_0 = \frac{1}{S_1^*} = \frac{\beta}{m+g}. \quad 6$$

Dalam hal ini R_0 disebut *the basic reproductive ratio of epidemic* (Anderson & May, 1993).

Jika $R_0 < 1$ maka hanya ada satu titik tetap, yaitu *disease-free equilibrium* $(S_0^*, I_0^*) = (1, 0)$. Dalam hal ini setiap penderita hanya dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya penyakit akan hilang. Di lain pihak, apabila $R_0 > 1$ maka setiap penderita dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya akan terjadi epidemik dengan *endemic equilibrium* $(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{m+g}{\beta}, \frac{m}{\beta}(R_0-1) \right)$. Secara formal hal ini dapat diperlihatkan dengan menguji kestabilan dari (S_0^*, I_0^*) dan (S_1^*, I_1^*) .

2.2 Kestabilan titik tetap untuk model SIR

Kestabilan kedua titik tetap, (S_0^*, I_0^*) dan (S_1^*, I_1^*) , akan diuji dengan memakai *neighbourhood stability analysis* untuk nilai R_0 yang berbeda. Matriks Jacobian untuk sistem persamaan diferensial 1 dan 2 adalah

$$M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\beta I + m) & -\beta S \\ \beta I & \beta S - (m + g) \end{pmatrix}, \quad 7$$

yang mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad 8$$

dengan

$$a_1 = -\text{trace} M = -(m_{11} + m_{22}), \quad 9$$

dan

$$a_2 = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}. \quad 10$$

Sebuah titik tetap akan stabil apabila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ (Nisbet & Gurney, 1982). Ilustrasi kestabilan titik tetap dapat dilihat misalnya dalam Supriatna & Soewono (2000). Selanjutnya pengujian akan dilakukan dengan melihat dua buah kasus.

I. Kasus $R_0 < 1$:

a. Kestabilan di $(S_0^*, I_0^*) = (1, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} -m & -\beta \\ 0 & \beta - (m + g) \end{pmatrix} \text{ sehingga diperoleh}$$

$$a_1 = -\text{trace} M = -(m + \beta - m - g) = m + ((m + g) - \beta) > 0,$$

$$a_2 = \det M = -m(\beta - (m + g)) > 0.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa (S_0^*, I_0^*) stabil lokal.

b. Kestabilan di $(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{m+g}{\beta}, \frac{m}{\beta}(R_0-1) \right)$.

$$M = \begin{pmatrix} -(\beta \frac{m}{\beta}(R_0-1) + m) & -\beta \frac{m+g}{\beta} \\ \beta \frac{m}{\beta}(R_0-1) & \beta \frac{m+g}{\beta} - (m+g) \end{pmatrix} \text{ sehingga diperoleh}$$

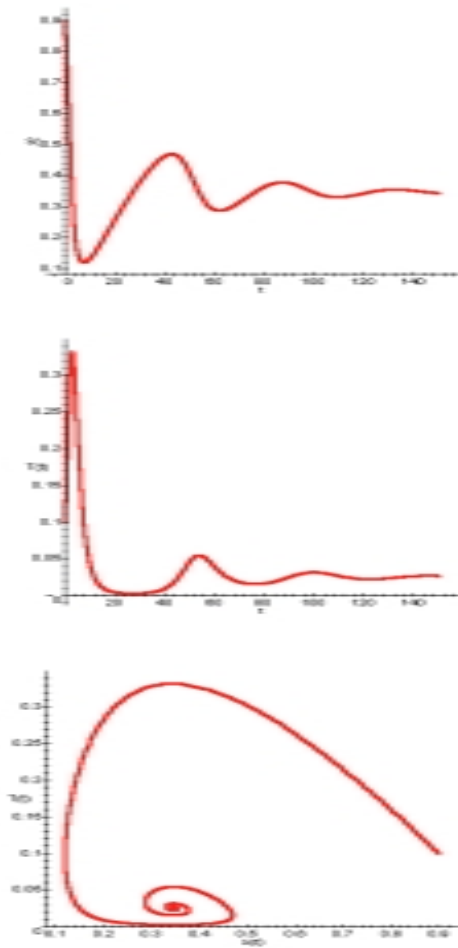
$$a_1 = -\text{trace} M = -(-mR_0 + m - m) + 0 > 0,$$

$$a_2 = \det M = -(-(m+g)(m(R_0-1))) < 0.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa (S_1^*, I_1^*) tidak stabil.

II. Kasus $R_0 > 1$:

Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa (S_0^*, I_0^*) tidak stabil dan (S_1^*, I_1^*) stabil.



Gambar 1: Solusi sistem persamaan diferensial tanpa adanya vaksinasi untuk nilai-nilai $m = 0,02$, $\beta = 1,5$ dan $g = 0,5$, yang memberikan $R_0 = 2,885 > 1$, $S_1^* = 0,347$, $I_1^* = 0,025$ dan $R_1^* = 0,628$ (tidak digambarkan di sini). Gambar dari atas ke bawah: $S(t)$ terhadap t , $I(t)$ terhadap t dan $I(t)$ terhadap $S(t)$.

2.3 Vaksinasi pada model SIR

Misalkan sebagian proporsi dari populasi susceptible mendapatkan vaksinasi (*soon after birth*). Proporsi tersebut misalkan p . Dengan demikian maka persamaan 1 akan berubah menjadi

$$\frac{dS}{dt} = (1-p)m - (\beta I + m)S. \quad 11$$

Titik tetap untuk sistem dengan vaksinasi ini dapat dicari dari $\frac{dS}{dt} = (1-p)m - (\beta I + m)S = 0$, yang diberikan oleh

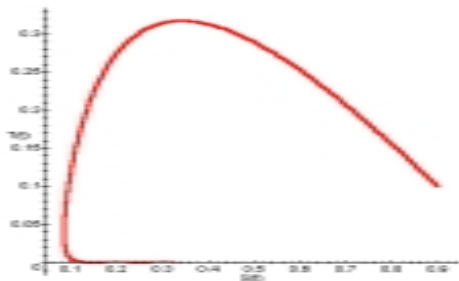
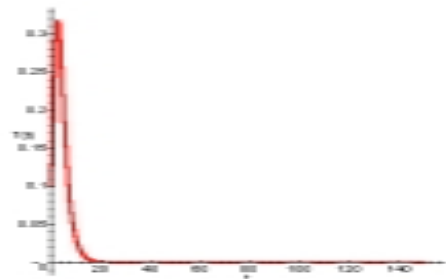
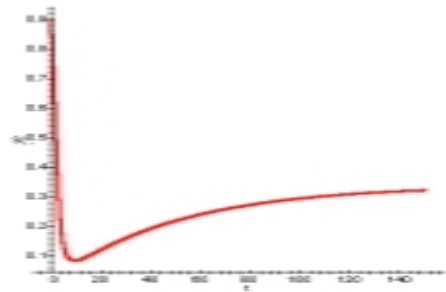
$$I_{v1}^* = \frac{m}{\beta} \left(\frac{(1-p)}{S_{v1}^*} - 1 \right) = \frac{m}{\beta} ((1-p)R_0 - 1) = I_1^* - \frac{m}{m+g} p. \quad 12$$

Endemic equilibrium yang dihasilkan adalah (S_{v1}^*, I_{v1}^*) . Dalam hal ini $S_{v1}^* = S_1^*$. *Disease-free equilibrium* diberikan oleh $(S_{v0}^*, I_{v0}^*) = (1-p, 0)$. Dari I_{v1}^* terlihat bahwa pada akhirnya tidak akan ada penderita apabila $(1-p)R_0 \leq 1$ yang berarti $p \geq 1 - \frac{1}{R_0}$. Secara umum

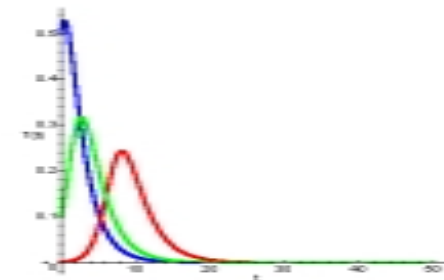
$$p_c = 1 - \frac{1}{R_0} \quad 13$$

dinamakan sebagai *critical vaccination level*. Analisis kestabilan lokal dapat dilakukan untuk kasus $p > p_c$ dan $p < p_c$.

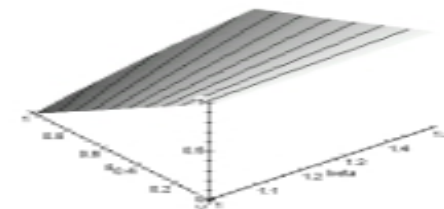
Sebagai ilustrasi diberikan contoh numerik dengan menggunakan nilai-nilai $m = 0,02$, $\beta = 1,5$ dan $g = 0,5$, yang memberikan $R_0 = 2,885 > 1$, $S_1^* = 0,347$, $I_1^* = 0,025$. Gambar 1 memperlihatkan solusi sistem persamaan diferensial tanpa adanya vaksinasi ($p = 0$). Gambar 2 memperlihatkan solusi sistem persamaan diferensial dengan adanya vaksinasi sebesar $p = 66\%$. Gambar 3 memperlihatkan independensi pengaruh tingkat vaksinasi $p = 66\%$ terhadap proporsi awal penderita dan Gambar 4 memperlihatkan tingkat vaksinasi kritis sebagai fungsi dari β dan g untuk nilai $m = 0,02$.



Gambar 2: Solusi sistem persamaan diferensial dengan adanya vaksinasi sebesar $p = 66\%$ dari keseluruhan populasi susceptible untuk nilai-nilai $m = 0,02$, $\beta = 1,5$ dan $g = 0,5$, yang memberikan $R_0 = 2,885 > 1$, $S_1^* = 0,347$, $I_1^* = 0,025$ dan $R_1^* = 0,628$ (tidak digambarkan di sini). Gambar dari atas ke bawah: $S(t)$ terhadap t , $I(t)$ terhadap t dan $I(t)$ terhadap $S(t)$.



Gambar 3: Solusi sistem persamaan diferensial untuk $I(t)$ terhadap t dengan adanya vaksinasi sebesar $p = 66\%$ untuk nilai-nilai seperti pada Gambar 1 dan 2 dengan nilai awal yang berbeda-beda, yaitu $I(0)=0,001$, $I(0)=0,1$ dan $I(0)=0,5$. Nampak bahwa pada akhirnya (untuk nilai t yang semakin besar) nilai awal tidak berpengaruh.



Gambar 4: Tingkat vaksinasi kritis sebagai fungsi dari β dan g untuk nilai $m = 0,02$.

3. Penutup

Model SIR menunjukkan bahwa tingkat vaksinasi minimum yang harus dilakukan dalam pencegahan epidemik dapat ditentukan sebagai fungsi dari laju kelahiran dan kematian penduduk (*demographic parameter*), laju kontak antara penderita dengan orang sehat, dan laju kesembuhan dari penyakit (*epidemiological parameters*). Mengingat hal tersebut di atas, maka penelitian lebih lanjut diperlukan untuk mengetahui parameter-parameter yang mempengaruhi tingkat vaksinasi minimum tersebut. Nilai parameter ini mungkin spesifik dari segi demography dan pasti spesifik dari segi penyakit yang diteliti. Hal ini memberikan prospek penelitian multidisipliner, yang sejauh ini semakin disadari kepentingannya. Dari

aspek kajian multidisipliner, model yang ada sekarang masih dapat disempurnakan dengan misalnya melihat aspek ekonomi dari strategi vaksinasi konstan dimana pada model ini persentase penduduk yang harus diberi vaksinasi harus lebih dari suatu *threshold*, yaitu $p > p_c$, yang mungkin tidak optimal dalam implementasinya. Penelitian lanjut diperlukan untuk menentukan strategi yang optimal tersebut.

Acknowledgement

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Prof. Hans Heesterbeek (University of Utrecht – The Netherlands) yang telah menunjukkan cara lain yang lebih sederhana dalam perhitungan R_0 , yang dapat dipakai sebagai pembanding terhadap hasil yang diperoleh pada tulisan ini.

Daftar Pustaka

- Anderson, R. & R. May (1993). *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- Diekmann, O & J.A.P. Heesterbeek (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. John Wiley & Sons, New York, USA.
- Esteva, L. & C. Vargas (1998). Analysis of a dengue disease transmission model. *Math. Biosc.* **150**:131-151.
- Kermack, W.O. & A.G. McKendrick (1927). Contribution to the mathematical theory of epidemics, part I. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* **115**: 700-72: Reprinted as *Bull. Math. Biol.* (1991), **53**: 33-35.
- Nisbet, R.M. & C. Gurney (1982). *Modelling Fluctuating Populations*. John Wiley, Brisbane, Australia.
- Ross, R (1911). *The Prevention of Malaria* (2nd Ed.). Murray, London, UK.
- Shulgin, B., L. Stone & Z. Agur (1998). Pulse vaccination strategy in the SIR Epidemic Model. *Bull. Math. Biol.* **60**(6): 1123-1148.
- Soewono, E & A.K. Supriatna (2001). A Two-dimensional Model for the Transmission of Dengue Fever Disease . *Bull. Malay. Math. Sc. Soc.* **24**(1): 49-57.
- Supriatna, A.K. & E. Soewono (2000). Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah. *Bionatura* **2**(3):104-116.