Seminar Nasional Matematika 2008
Universitas Padjadjaran – Universitas Indonesia

PERBANDINGAN METODE PERAMALAN PADA MODEL ARFIMA

Gumgum Darmawan
Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA UNPAD
e-mail : gumstat_1973@yahoo.com

ABSTRAK

Pada makalah ini akan di bandingkan dua metode peramalan dari Model ARFIMA. Metode pertama menggunakan metode peramalan ARIMA, dimana sebelumnya data dilakukan pembedaan (*differencing*) dengan nilai pembeda yang telah ditentukan. Metode kedua menggunakan metode peramalan ARFIMA langsung. Model ARFIMA yang dikaji adalah Model ARFIMA(1,*d*,0), Model ARFIMA(0,*d*,1) dan Model ARFIMA(1,*d*,1). Perbedaan dari kedua metode ini ditentukan berdasarkan nilai dari MSE (*Mean Square Error*).

Kata Kunci : ARFIMA, MSE

ABSTRACT

This paper compares two forecasting methods from ARFIMA model. The first method uses ARIMA forecasting method, time series data are firstly differenced by the value of differencing parameter. The second method uses ARFIMA forecasting method directly. This paper uses three ARFIMA models i.e ARFIMA(1,d,0), ARFIMA(0,d,1) and ARFIMA(1,d,1) models. The difference from these two methods is detremined based on the value of MSE (Mean Square Error).
Keywords : ARFIMA, MSE (*Mean Square Error*)

1. Pendahuluan

Meramalkan suatu kejadian merupakan suatu proses penentuan suatu nilai yang tidak diketahui yang mungkin terjadi pada masa yang akan datang. Pada analisis data deret waktu, untuk membantu penentuan nilai yang mungkin terjadi diperlukan data sebelumnya. Untuk keperluan peramalan maka data deret waktu masa lalu harus disesuaikan dengan keperluan peneliti. Jika ingin memperkirakan nilai masa datang dalam harian maka data terlebih dahulu dibuat dalam interval harian. Setelah data diperoleh maka langkah selanjutnya adalah memodelkan data berdasarkan identifikasi seperti pada Metode Box-Jenkins, menggunakan plot ACF dan PACF.

Adakalanya, plot ACF dan PACF menunjukkan pola *long memory*, ini terlihat dari nilai-nilai autokorelasi pada plot ACF atau PACF turun secara lambat untuk lag yang semakin meningkat. Identifikasi ini mengindikasikan bahwa nilai dari *d* (koefisien pembeda, *differencing*) bernilai pecahan, sehingga model yang paling cocok adalah Model ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*).

Pemodelan ARFIMA pertama kali dikembangkan oleh Granger dan Joyeux (1980) yang merupakan pengembangan dari model ARIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*). Hosking (1981) mengkaji sifat-sifat *long memory* dari model ARFIMA stasioner dan nonstasioner. Sowell (1992) mengembangkan penaksiran parameter pembeda melalui Metoda *Exact Maximum Likelihood*, Beran (1995) mengembakan sebuah pendekatan *Maximum Likelihood* untuk parameter pembeda melalui Metode *Nonlinear Least Square* (NLS).

Walaupun model ARFIMA lebih aplikatif dan akurat dalam memodelkan data dibandingkan dengan Model ARIMA, akan tetapi masih terdapat beberapa kesulitan dalam peramalannya. Proses peramalan model ARFIMA tidak semudah model ARIMA, baik secara matematik maupun secara komputasi. Untuk itu, pada penelitian ini akan dikaji metode peramalan ARFIMA. Metode pertama, lakukan pembedaan dari data berdasarkan nilai d yang telah diidentifikasi sehingga data mengikuti model ARIMA(p,0,q) dan peramalan mengikuti metode peramalan ARIMA. Metode kedua peramalan dilakukan melalui metode ARFIMA(p,d,q) secara langsung.

2. Model ARFIMA

Model ARFIMA(p,d,q) yang dikembangkan Granger dan Joyeux (1980) adalah sebagai berikut,

$$\phi(B)(1-B)^d(Z_t-\mu)=\theta(B)a_t, \qquad (1)$$

dengan :
t = indeks dari pengamatan,
d = parameter pembeda (bilangan pecahan),
μ = rata-rata dari pengamatan,
$a_t \sim$ IIDN(0, σ_a^2),
$\phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p$ adalah polinomial AR(p),
$\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q$ adalah polinomial MA(q),
$(1-B)^d=\nabla^d=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(\quad)^k - 1$ operator pembeda pecahan.

Untuk suatu d bernilai pecahan, operator *differencing* fraksional $(1-B)^d$ didefinisikan sebagai

$$(1-B)^d = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\,k!}\ ^k \qquad . \qquad (2)$$

Jika persamaan $\lambda_k(d)=\dfrac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\,k!}$ pada persamaan (2) dijabarkan untuk berbagai nilai k maka :

untuk k = 1, diperoleh $\dfrac{\Gamma(-d+1)}{\Gamma(-d)1!}=\dfrac{(-d)!}{(-d-1)!1!}=-d$,

untuk k = 2, diperoleh $\dfrac{\Gamma(-d+2)}{\Gamma(-d)2!}=\dfrac{(-d+1)!}{(-d-1)!2!}=\dfrac{-d(1}{2}$,

untuk k = 3, diperoleh $\dfrac{\Gamma(-d+3)}{\Gamma(-d)3!}=\dfrac{(-d+2)!}{(-d-1)!3!}=\dfrac{-d(1-d)(2}{6}$,

dan seterusnya. Persamaan (2) dapat ditulis kembali menjadi

$$(1-B)^d = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\quad)d^k,$$

dengan $\lambda_0(d) = 1$,

$\lambda_1(d) = -d$,

$\lambda_2(d) = -\frac{1}{2}d(1-d)$,

$\lambda_3(d) = -\frac{1}{6}d(1-d)(2-d)$ dan seterusnya.

Sehingga, persamaan (2) di atas dapat ditulis menjadi

$$(1-B)^d = 1 - dB - \frac{1}{2}d(1-d)B^2 - \frac{1}{6}d(1-d)(2-d)B^3 - \ldots \qquad (3)$$

2.1 Peramalan Model ARIMA

Peramalan pada model ARIMA pada makalah ini mengikuti persamaan pada (Cryer, 1986), dengan persamaan peramalan AR(1), MA(1) dan ARMA(1,1) masing-masing sebagai berikut;

$$\hat{Z}(h) = \mu + \phi^h (Z_t - \mu)$$
$$\hat{Z}(h) = \mu - \theta a_t \qquad (4)$$
$$\hat{Z}(h) = \mu + \phi^h (Z_t - \mu) - \phi^{h-1}\theta a_t$$

dengan

h adalah periode yang akan diramalkan

μ adalah rata-rata data deret waktu

ϕ adalah parameter Autoregresi

θ adalah parameter *Moving Average*

a_t adalah residual ke-t

2.2 Peramalan Model ARFIMA

Peramalan pada model ARFIMA pada dasarnya sama dengan model ARIMA, pada persamaan (4) dapat dibentuk menjadi persamaan

$$\left(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right)(1-B)^d Z_t = \left(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) a_t ,$$

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \ldots - \phi_p Z_{t-p} = \frac{\left(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) a_t}{(1-B)^d} . \qquad (5)$$

Menurut persamaan (2), dapat dibentuk persamaan sebagai berikut

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\,k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(d) B^k ,$$

sehingga persamaan (5) di atas menjadi,

$$Z_t = \left(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p}\right) + \left(\frac{\left(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) a_t}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(d)\right) B^k}\right).$$

Dengan mengalikan setiap suku dari persamaan di atas dengan $\frac{a_t}{a_t}$ maka persamaannya menjadi,

$$Z_t=\phi_1 Z_{t-1}+\phi_2 Z_{t-2}+\ldots+\phi_p Z_{t-p}+\frac{a_t^2}{fd(t)}-\frac{\theta_1 a_{t-1}^2}{fd(t-1)}-\cdots-\frac{\theta_q a_{t-q}^2}{fd(t-q)}, \qquad (6)$$

dengan

$$fd(t)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(d)\right)^k B\, a_t$$

$$fd(t-1)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(d)\right)^k B\, a_{t-1}$$

.

.

.

$$fd(t-q)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(d)\right)^k B\, a_{t-q}$$

Taksiran *h* langkah ke depan diperoleh dengan mengganti indeks *t* menjadi *T*+*h*

$$\hat{Z}_{T+h}=\hat{\phi}_1 Z_{T+h-1}+\ldots+\hat{\phi}_p Z_{T+h-p}+\frac{a_{T+h}^2}{fd(T+h)}-\cdots-\frac{\hat{\theta}_q a_{T+h-q}^2}{fd(T+h-q)}. \qquad (7)$$

Nilai $a_{T+h}=0$ untuk peramalan Z_{T+h}

$$E\left(Z_{T+h}\mid Z_T, Z_{T-1},\ldots\right)=\begin{cases} Z_{T+h}, & h\le 0\\ f_{T+h}, & h>0\end{cases}$$

dan

$$E\left(a_{T+h}\mid Z_T, Z_{T-1},\ldots\right)=\begin{cases} a_{T+h}, & h\le 0\\ 0, & h>0\end{cases}$$

3. Kajian Simulasi

Simulasi menggunakkan Software R versi 2.7.2, dengan banyaknya data T = 300, 600, dengan perulangan 1000 kali. Untuk mengaktifkan fasilitas pembeda pecahan (*fractional Difference*) pada Sotware R, Sebelumnya di *install Package fracdiff.* Model ARFIMA yang dibangkitkan mengikuti Model ARFIMA(1,*d*,0) dan Model ARFIMA(0,*d*,1) dengan nilai *d* = 0,2 dan 0,4. Parameter ϕ dan θ masing-masing 0,5, a_t mengikuti Distribusi Normal dengan rata-rata nol dan varians 1. Akurasi penaksiran parameter *d* ditentukan dengan menghitung rata-rata dan standar deviasi dari 1000 nilai *d* untuk Model ARFIMA.

Langkah-langkah dalam melakukan simulasi.

1. Bangkitkan data ARFIMA dengan T = 300, 600 dan perulangan sebanyak 100 kali dengan *d* = 0,2 dan 0,4 dengan rata-rata nol dan varian 1. Dengan Model AR(1) dan MA(1) masing-masing parameternya 0,5. Pada Model ARMA(1,1) parameternya ϕ dan θ = -0.2.
2. Bagi data menjadi dua, yaitu data *training* sebanyak T-10 data pertama dan 10 data terakhir sebagai data *testing*.

3. Untuk peramalan Metode ARIMA lakukan pembedaan pada data *training* sebesar d = 0,2 dan 0,4 , kemudian lakukan peramalan untuk 10 periode ke depan dengan persamaan 4.
4. Untuk peramalan Metode ARFIMA, lakukan peramalan untuk 10 periode ke depan dengan menggunakan persamaan 7.
5. Tentukan nilai MSE dan standar deviasi dari MSE dari kedua metode tersebut untuk 10 periode kedepan.

Tabel 1. Nilai MSE dan Standar Deviasi dari peramalan Model ARFIMA

T	Model ARFIMA	d = **0,2**		d = **0,4**	
		MSE	**SD(MSE)**	**MSE**	**SD(MSE)**
300	**ARFIMA(1,*d*,0)**	0,048	0,072	0,044	0,073
	ARFIMA(0,*d*,1)	0,025	0,035	0,032	0,071
	ARFIMA(1,*d*,1)	0,086	0,131	0,096	0,142
600	**ARFIMA(1,*d*,0)**	0,045	0,066	0,049	0,073
	ARFIMA(0,*d*,1)	0,025	0,036	0,028	0,041
	ARFIMA(1,*d*,1)	0,115	0,205	0,089	0,126

Berdasarkan hasil simulasi pada tabel 1, Model ARFIMA(1,*d*,0) dan ARFIMA(0,*d*,1) lebih akurat dibandingkan dengan peramalan pada Model ARFIMA(1,*d*,1). Disamping nilai MSE, nilai standar deviasi dari model ARFIMA(1,*d*,1) relatif lebih besar dibandingkan dengan dua model lainnya.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil perbandingan dua metode peramalan secara simulasi tampak bahwa Nilai MSE secara keseluruhan memberikan hasil yang cukup baik. Metode penaksiran melalui pembedaan terlebih dahulu dari data *long memory* lalu dilakukan peramalan dengan Metode ARIMA relatif sama dengan metode penaksiran melalui Metode ARFIMA secara langsung.

DAFTAR PUSTAKA

Beran, J. (1994), "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 57, hal. 659-672.

Cryer,J,D. (1986), "*Time Series Analysis*", PWS-KENT Publishing Company, Boston,USA.

Granger, C. W. J. dan Joyeux,R (1980), "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1, hal. 15-29.

Hosking, J.R.M. (1981), "Fractional Differencing", *Biometika*, Vol. 68, hal. 165-176.

Sowell, F. (1992), "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models", *Journal of econometrics,* Vol.53, hal.165 – 188.