MODEL OPTIMISASI PORTOFOLIO MENGGUNAKAN HIMPUNAN FUZZY

KARYA ILMIAH

SUDRADJAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN
2009

MENGETAHUI

<u>Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, MS</u>
Guru Besar Matematika FMIPA Unpad

MENGETAHUI

Prof. Dr. Herman Mawengkang
Professor of Operations Research
Departement Mathematics FMIPA USU

Surat Pernyataan

Setelah membaca dengan seksama karya ilmiah dari Dr.Supian Sudrajat (Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran), dengan judul :

Model Optimasi Portofolio Dengan menggunakan Himpunan Fuzzy

maka saya berpendapat bahwa:

Isi dari makalah tersebut merupakan salah satu masalah dalam bidang matematika finansial, yaitu masalah investasi finansial, yang dipelopori oleh H.Markovitz, khususnya mengenai seleksi portofolio. Pada dasarnya dalam makalah tersebut dibahas model optimasi portofolio dengan pendekatan program linear fuzzy *(fuzzy linear programming)*, berlandaskan berbagai dasar teoritis yang diperlukan. Dengan pembahasan teoritis tersebut, makalah tersebut sangat menarik terutama bagi peneliti teoritis dalam bidang finansial. Pendekatan teoritis (matematis) ini sangat jarang diminati oleh para peneliti (apalagi pengguna !) di Indonesia, walaupun pendekatan teoritis tersebut merupakan hal multak dalam kemajuan bidang teori finansial. Meskipun dasar pembahasannya secara teoritis, namun dalam makalah ilmiah tersebut, Dr.Supian Sudradjat memberikan pula beberapa contoh praktis (numerik) dari metode yang diketengahkan dalam makalah ilmiah tersebut.

Disamping itu saya berpendapat bahwa makalah tersebut merupakan makalah yang benar-benar berdasarkan pendekatan ilmiah (deduktif secara matematis) dalam bidang matematika finansial khususnya dalam seleksi portofolio. Sepanjang yang saya ketahui, dalam makalah tersebut terdapat beberapa ide dan hasil yang dapat dianggap original.

Demikian surat pernyataan ini diberikan agar dapat digunakan dalam pengusulan Dr.Supian Sudradjat ke jenjang jabatan Guru Besar.

Jakarta, 2 Februari 2009,

Prof.Dr.Djati Kerami
Guru Besar Pemodelan Matematis
Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia

MODEL OPTIMISASI PORTOFOLIO DENGAN MENGGUNAKAN HIMPUNAN FUZZY

Sudradjat[*)]
sudradjat@unpad.ac.id , adjat03@yahoo.com

1. Pendahuluan

Pada pertengahan abad ke 1952, H. Markowitz mempelopori teori financial modern yang dikenal dengan model meanvarians portofolio seleksi. Teori tersebut akan memudahkan dan menginspirasi dalam permasalahan financial. Zhou dan Lie 2000 mengembangkan model "Markowitz complete continuous-time financial market". Varians mempunyai peran yang penting dalam pengukuran risiko. Banyak para peneliti mengemukakan bagaimana melakukan pengukuran risiko dalam investasi, begitu juga semivarians yang dikemukakan oleh Markowitz. Pada framework mean-risk, hanya mean-varians yang telah diterima pada *discete-time market*.

Masalah optimisasi portofolio pada suatu asset terbatas adalah masalah klasik dalam teori dan perhitungan financial. Markowitz 1952, pertama kali mengemukakan bahwa penampilan portofolio seharusnya diukur dalam dua dimensi yang berbeda, yaitu rata-rata yang menggambarkan ekspektasi return, dan risiko yang mengukur ketidakpastian return. Salah satu pendekatan teori terhadap masalah portofolio seleksi adalah stokastik *dominance*.

*) Staf dosen Jurusan Matematika FMIPA Unpad.

Optimisasi portofolio adalah merupakan target return diatas kenaikan (*rate*) risiko bebas pada pasar tertentu dimana untuk waktu yang sama dapat menjamin pencapaian kenaikan return minimum, salah satu teori yang dapat digunakan untuk mencapai target tersebut adalah teori keputusan fuzzy. Teorri keputusan fuzzy menyediakan framework analisis yang sangat baik seperti yang kemukakan oleh Supian, 2007 [30, 31] dan Supian, 2008 . Karena permasalahan dalam dunia praktis membutuhkan teori untuk memeriksa berbagai macam skenario pasar dan setiap sekenario pasar digambarkan kedalam bentuk fungsi tujuan.

Para investor menyadari investasi yang dilakukan untuk mendapatkan *return* yang mengandung konsekuensi risiko. Para investor sebenarnya tidak mengetahui secara pasti seberapa besar hasil yang akan diperoleh dari investasi yang dilakukan. Namun demikian para investor dapat memperkirakan berapa keuntungan yang diharapkan dan seberapa besar kemungkinan hasil yang sebenarnya akan menyimpang dari yang diharapkan. Upaya melakukan diversifikasi dapat diwujudkan dengan cara mengkombinasikan berbagai pilihan saham dalam investasinya. Melalui portofolio saham para investor berusaha memaksimumkan keuntungan yang diharapkan dari investasi dengan tingkat risiko tertentu atau berusaha meminimumkan risiko untuk sasaran tingkat keuntungan tertentu. Permasalahannya jenis saham apa yang akan dipilih dalam portofolionya, dan para investor cenderung memilih portofolio yang optimal, yaitu yang sesuai dengan preferensinya terhadap keuntungan serta risiko yang ditanggung. Pada analisis keuangan dikenal dua macam model analisis optimisasi portofolio yaitu *stochastic dominance* dan *single index model.*

Pada karya ilmiah ini akan dibahas dua model optimisasi portofolio, pertama model optimisasi portofolio dengan pembatas *stochastic dominance*, kemudian model ini diselesaikan dengan menggunakan pemrograman linear *fuzzy* lebih khusus lagi dengan menggunakan *linear membership function* dan kedua pendekatan model posibilistik *VaR* pada portofolio seleksi.

2. Stokastik *dominance*

Relasi dari stokastik *dominance* merupakan konsep dasar dari teori keputusan dan ekonomi, Dentcheva dan Ruszczynski 2003, Hanoch dan Levy 1969, Quirk dan Saposnik 1962 dan Rothschild 1969. Model dasar stokastik optimisasi diformulasikan sebagai berikut:

$$\max_{\mathbf{z}\in Z} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{z},\omega)], \tag{2.1}$$

dimana ω adalah kejadian dasar pada ruang probabilitas (Ω, F, P), $\mathbf{z}$ adalah vector keputusan yang sesuai dengan ruang $\mathcal{Z}$, dan $\varphi : \mathcal{Z}\times\Omega \to \mathbb{R}$. Himpunan $\mathrm{Z}\subset\mathcal{Z}$ didefinisikan secara eksplisit, atau beberapa kendala yang mempengaruhi kejadian dasar ω dan harus memenuhi probabilitas yang tepat. Model Optimisasi Stokastik pertama kali dikembangkan oleh Lehmann 1955 dan Hanoch dan Levy 1969. Teori matematika dari model-model ekspektasi melibatkan keputusan dua-stage dan multi-stage telah dikembangkan oleh Wets 1999 dan Birge 1997, sedangkan model-model yang melibatkan kendala-kendala probabilitas diawali oleh Charnes dan Cooper 1959, Prekopa 1979, Dentcheva dan Ruszczynski 2003 membahas secara lengkap teori dan metode numerik untuk model linear dengan satu kendala probabilistik dengan beberapa pertidaksamaan secara terbatas.

Dalam pendekatan stokastik *dominance, random return* merupakan hasil dari perbandingan titik-pertitik (*point-wise*) dari beberapa fungsi performansi yang dikonstruksi dari fungsi distribusinya. Untuk variabel acak V, bentuk fungsi didefinisikan dengan fungsi distribusi kontinu kanan dari V :

$$F(V,\eta) = \mathbb{P}\{V \le \eta\} \text{ untuk } \eta \in \mathbb{R}.$$

Random return V dikatakan stokastik dominance orde pertama (Dentcheva dan Ruszczynski, 2003, Lehmann, 1955 dan Quirk dan Saposnik, 1962), ditulis $V \succeq_{FSD} S$, jika

$$F(V;\eta) \le F(S;\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathbb{R}.$$

Tentukan fungsi $F_2(V;\cdot)$ dengan

$$F_2(V;\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F(V;\alpha)\,d\alpha \quad \text{untuk} \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

fungsi integral adalah fungsi tidak naik, ini adalah fungsi konveks dari η dan ditentukan dengan relasi lemah (*weak relation*) dari orde dua stokastik *dominance* (*SSD*). Hal ini menunjukkan bahwa *random return* V adalah stokastik *dominance* S orde dua, ditulis $V \succeq_{SSD} S$, jika

$$F_2(V;\eta) \le F_2(S;\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathbb{R}.$$

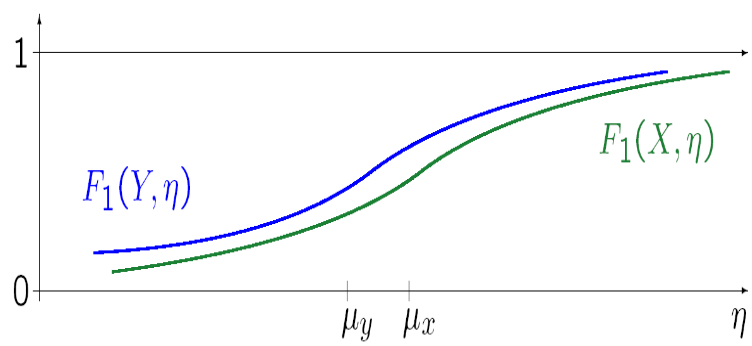
Hubungan kuat relasi *dominance* untuk $\succeq_{FSD}$ dan $\succeq_{SSD}$ adalah didefinisikan dengan: $V \succ S$ jika dan hanya jika $V \succeq S$, $S \not\succeq V$.

Lebih penting lagi, untuk $V \in \mathcal{L}^m(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dapat didefinisikan secara rekursif fungsi-fungsi

$$F_k(V;\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_{k-1}(V,\alpha)d\alpha \quad \text{untuk } \eta \in \mathbb{R},\ \text{k} = \overline{3, m+1}. \tag{2.3}$$

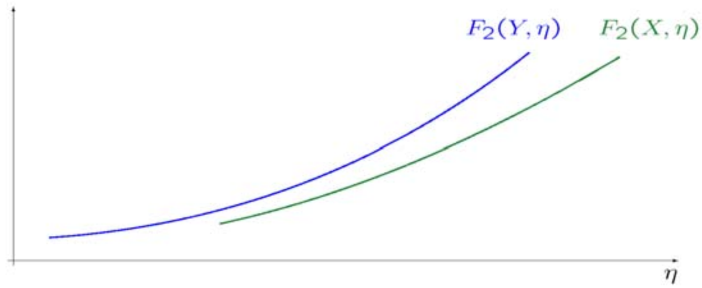
Juga untuk $V \in \mathcal{L}^m(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dapat didefinisikan secara rekursif fungsi-fungsi

$$F_k(V;\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_{k-1}(V,\alpha)d\alpha \quad \text{untuk } \eta \in \mathbb{R},\ \text{k} = \overline{3, m+1}. \tag{2.4}$$



Gambar 2.1 Stokastik *dominance* orde pertama

$$F_2(X;\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_1(X;\alpha)\, d\alpha = \mathbb{E}(\eta - X)_+ \ \ for \eta \in \mathbb{R} \text{ untuk } \eta \in \mathbb{R}$$



Gambar 2.2 Stokastik *dominance* orde dua

Definisi 2.1. (Dentcheva dan Ruszczy´nski 2003) *Suatu variabel acak* $X \in \mathcal{L}^{k\text{-}1}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dominance orde ke-k terhadap variabel acak* $Y \in \mathcal{L}^{k\text{-}1}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jika,*

$$F_k(X;\eta) \le F_k(Y;\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathbb{R}. \qquad (2.5)$$

Relasi (2.5) *dapat dituliskan*

$$X \succeq_{(k)} Y \qquad (2.6)$$

dan himpunan X *memenuhi relasi*

$$A_k(Y) = \{X \in \mathcal{L}^{k-1}(\Omega, \mathcal{F}, P) : X \succeq_{(k)} Y\}. \qquad (2.7)$$

Dengan menukarkan orde dari integrasi dapat diperlihatkan fungsi $F_2(V;\cdot)$ juga ekpektasi *shortfall* (Rockafellar and Uryasev, 2002): untuk semua target nilai η, diperoleh

$$F_2(V;\eta) = E\left[(\eta - V)_+\right], \qquad (2.8)$$

dimana $(\eta - V)_+ = \max(\eta - V, 0)$. Fungsi $F_2(V;\cdot)$ adalah kontinu, konveks, nonnegatif dan tak naik. Hal ini didefinisikan untuk semua variabel acak V dengan nilai ekspektasi terhingga.

3. Masalah Portofolio

Proses portofolio seleksi dibagi dalam dua stage. Stage pertama mulai dengan observasi dan pengalaman dan diakhiri dengan kenyakinan performansi masa depan. Stage kedua mulai dengan kenyakinan yang relevan tentang performansi masa depan dan berakhir dengan memilih portofolio, Markowitz, 1987.

Asumsi dasar masalah standar untuk portofolio seleksi adalah sebagai berikut:

(a) n sekuritas,

(b) inisialisasi dari jumlah dana yang diinvestasikan,

(c) permulaan periode pesanan,

(d) akhir periode pesanan,

dan tentukan $x_1, \cdots, x_n$ sebagai bobot proporsi dari yang diinvestasikan inivestor. Ini adalah proporsi dari jumlah awal yang diinvestasikan dalam n sekuritas di awal dari *holding* periode yang menjelaskan portofolio untuk dipastikan sampai akhir dari *holding* periode. *Standar view* adalah hanya ada satu tujuan di seleksi portofolio dan untuk memaksimalkan portofolio return, prosentase return didapat dari portofolio holding periode.

Misalkan $R_1,...,R_n$ adalah *random returns* dari aset $\overline{1,n}$. Asumsikan bahwa $[|R_j|]<\infty$ untuk semua $j=\overline{1,n}$. Notasikan $x_1,...,x_n$ pembagian modal investasi dari asset $\overline{1,n}$, maka model total return dapat dituliskan:

$$R(x) = R_1 x_1 + ... + R_n x_n \, . \qquad (3.1)$$

Himpunan alokasi aset yang mungkin dapat dirumuskan:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 + ... + x_n = 1, x_j \geq 0, j = 1,...,n \right\}$$

Rata *return* $\quad \mu(x) = \mathbb{E}\left[R(x)\right].$

Varians *return* $\quad \rho(x) = \mathbb{V}ar\left[R(x)\right],$

Rata-rata risiko:

$$\max_{x\in X} \mu(x) - \lambda\rho(x)$$
$$s/t \qquad x \in X, \tag{3.2}$$

dimana, λ adalah parameter nonnegatif yang merepresentasikan perubahan rate dari rata-rata risiko. Jika $\lambda = 0$, tidak mempunyai nilai risiko dan masalah direduksi menjadi maksimasi rata-rata. Jika $\lambda > 0$ pilih salah satu dari rata-rata dan risiko.

Pendekatan lainnya adalah dengan memilih fungsi utilitas $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, model optimisasinya dirumuskan sebagai berikut:

$$\max_{x\in X} \mathbb{E}\left[u\big(R(x)\big)\right]. \tag{3.3}$$

Fungsi $u(\cdot)$ pada umumnya adalah *concave* dan tak naik. Dalam pendekatan stokastik *dominance*, *random returns* dibandingkan dengan cara *point-wise* dari beberapa bentuk fungsi yang dibentuk dari distribusi fungsi. Untuk variabel acak real *V,* bentuk fungsi pertama didefinisikan sebangai kontinu kanan distribusi fungsi kualitatif dari V:

$$F(V;\eta) = \mathbb{P}(V \le \eta) \text{ untuk } \eta \in \mathbb{R}.$$

Random return V, dikatakan stokastik *dominance* orde pertama terhadap *random return S* , dinotasikan $V \succeq_{FSD} S$, jika

$$F(V;\eta) \le F(S;\eta) \text{ untuk } \eta \in \mathbb{R}.$$

Bentuk kedua fungsi F_2 , diberikan dari area di bawah distribusi fungsi *F*,

$$F_2(V;\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F(V;\xi)d\xi \quad \text{untuk } \eta \in \mathbb{R}.$$

dan defnisikan relasi yang lemah dari order kedua stokastik *dominance* (SSD). *Random return V* stokastik *dominance* ke S orde dua, dinotasikan $V \succeq_{SSD} S$, jika

$$F_2(V;\eta) \le F_2(S;\eta) \text{ untuk } \eta \in \mathbb{R}.$$

Portofolio *x* mendominasi portofolio *y* di bawah aturan *FSD*, jika

$$F(R(x);\eta) \le F(R(y);\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathbb{R},$$

dan x mendominasi y di bawah aturan *SSD* $(R(x) \succeq_{SSD} R(y))$, jika

$$F_2(R(x);\eta) \le F_2(R(y);\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathbb{R}.$$

Relasi stokastik dominance mempunyai peranan penting dalam teori keputusan, telah diketahui bahwa $R(x) \succeq_{FSD} R(y)$ jika dan hanya jika

$$E[u(R(x))] \ge E[u(R(y))], \tag{3.4}$$

untuk berbagai fungsi tak turun $u(.)$ dimana nilai ekspektasinya adalah terbatas. Selanjutnya, $R(x) \succeq_{SSD} R(y)$ jika dan hanya jika (3.4) tidak turun dan *concave*, yang mana nilai ekspektasi terbatas dapat dilihat pada Dentcheva dan Ruszczy´nski 2003.

Portofolio x disebut *SSD*-effisient (atau *FSD*-effesient) dalam sebuah himpunan portofolio X jika tidak terdapat $y \in X$ seperti $(R(y) \succ_{SSD} R(x))$ (or $(R(y) \succ_{FSD} R(x))$).

Pembahasan difokuskan pada relasi *SSD*, karena konsistensinya dengan tampilan preferensi yang berlawanan dengan risiko: jika $(R(y) \succ_{SSD} R(x))$, maka portofolio x lebih disukai dari y dengan semua risiko *averse decision makers*.

Definisi 3.1 (Ruszczy´nski dan Vanderbei, 2002) Model *mean-risk* (μ, ρ) *adalah konsisten terhadap SSD dengan koefisien* $\alpha > 0$*, jika relasi berikut dipenuhi*

$$R(x) \succeq_{SSD} R(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) - \lambda\rho(x) \ge \mu(y) - \lambda\rho(y) \textit{ untuk semua } 0 \le \lambda \le \alpha.$$

Perhatikan model optimisasi berikut (Dentcheva dan Ruszczy´nski, 2003):

$$\textit{maksimasi} \quad f(x) \tag{3.5}$$

$$\textit{kendala} \quad R(x) \succeq_{(2)} Y, \tag{3.6}$$

$$x \in X, \tag{3.7}$$

dimana $f : X \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu *concave* dituliskan, $f(x) = \mathbb{E}[R(x)]$ dan ini akan tetap memiliki solusi *nontrivial*, dengan melihat sifat *dominance constraints*.

Proposisi 3.1 (Dentcheva dan Ruszczy´nski, 2003) *Asumsikan bahwa* Y *suat*u *distribusi diskrit dengan realisasi* $y_i, i=\overline{1,m}$, *maka relasi* (2.6) *ekuivalen dengan*

$$\mathbb{E}[(y-R(x))_+] \le \mathbb{E}[(y-Y)_+], \forall i . \qquad (3.8)$$

Asumsikan bahwa return memiliki joint distribusi distkrit dengan relasi r_{tj}, $t = 1, \ldots, T$, $j=\overline{1,n}$, probabilitas p_t, t = 1, 2, . . . , T. Dengan memasukkan variabel s_{it} yang merepresentasikan *shortfall* dari $R(x)$ di bawah y_i pada realisasi *t, i* = 1, . . . ,*m* and $t=1,\cdots,T$, maka Proposisi 2 (Dentcheva dan Ruszczy´nski, 2003) dikembangkan oleh Supian 2007 [30,31] dan Supian, 2008 sebagai berikut.

Proposisi 3.2 *Jika diasumsikan bahwat* $R_j, j=1,\ldots,n$, *dan Y berdistribusi diskrit maka permasalahan* (3.5)–(3.7) *adalah ekivalen dengan permasalahan*

$$\textit{maksimasi} \quad f(x) \qquad (3.9)$$

$$\textit{kendala} \sum_{j=1}^{n} r_{tj}x_j - s_{it} \le -y_i,\ i=1,\ldots,m,\ t=1,\ldots,T, \qquad (3.10)$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t s_{it} \le F_2(Y;y_i),\ i=1,\ldots,m, \qquad (3.11)$$

$$s_{it} \ge 0\ i=1,\ldots,m,\ t=1,\ldots,T \qquad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le 1 \qquad (3.13)$$

$$-\sum_{j=1}^{n} x_j \le -1 \qquad (3.14)$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n, \qquad (3.15)$$

dan hal ini ekivalen dengan :

$$\textit{maksimasi} \quad \varphi(X) = \textit{maksimasi} \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \qquad (3.16)$$

$$\textit{kendala}, \sum_{j=1}^{n+mT} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=1,\ldots,mT+2+m, \qquad (3.17)$$

$$X_j \ge 0 \ ,\ j=1,\ldots,n+mT \qquad (3.18)$$

dimana $X=(x_1,\ldots,x_n,s_{11},\ldots,s_{1T},s_{21},\ldots,s_{2T},\ldots,s_{m1},\ldots,s_{mT})$,

$$a_{ij}=\begin{cases}-r_{ij} & ,j=1,\dots,n, i=i=Km+1,\dots,(K+1)m, K=0,\dots,(T-1)\\ -1 & ,i=Km+1,\dots,(K+1)m, K=0,\dots,(T-1)\ and\ j=n+1,\dots,n+T(i-1)+1\\ 0 & ,lainnya\end{cases}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & ,j=1,..,n,i=mT+1\\ 0 & ,lainnya\end{cases}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}-1 & ,j=1,..,n,\ i=mT+2\\ 0 & ,\ lainnya\end{cases}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}p_{j-n-T(K-1)} & ,j=n+T(K-1)+1,\dots,n+TK\ and\ K=1,\dots,m,i=mT+3,\dots,mT+m+2\\ 0 & ,\ lainnya,\end{cases}$$

bentuk tabel dari permasalahan (3.16)-(3.18) dapat dilihat pada **Lampiran**.

4. Masalah Portofolio dengan Koefisien Teknologi Fuzzy

Pada bagian ini model portofolio seleksi (Darinka dan Ruszczy´nski 2003) akan dibahas menggunakan pendekatan teori keputusan fuzzy Supian 2007 [31,32] dan Supian 2008.

Ambil masalah pemrograman linear (2.20)-(2.22) dengan koefisien teknologi fuzzy, Supian 2007 [31,32] dan Supian 2008.

$$maksimasi \quad \varphi(X)=maksimasi\sum_{j=1}^{n}c_jX_j \tag{4.1}$$

$$kendala \quad \sum_{j=1}^{n+mT}\tilde{a}_{ij}X_j \le b_i,\ i=1,\dots,mT+2+m, \tag{4.2}$$

$$X_j \ge 0,\ j=1,\dots,n+mT. \tag{4.3}$$

Asumsi 4.1. Supian 2007 [31,32] $\tilde{a}_{ij}$ *adalah fuzzy number dengan fungsi keanggotaan linear:*

(i) 1. *Untuk i=Km+1,…,(K+1)m, K=0,…,(T-1) dan j=1,…,n*

$$\mu_{a_{ij}}(t)=\begin{cases}1 & if \quad t<-r_{ij}, \\ (-r_{ij}+d_{ij}-t)/d_{ij} & if \quad -r_{ij}\le t<-r_{ij}+d_{ij}, \\ 0 & if \quad t\ge -r_{ij}+d_{ij,}\end{cases}$$

2. *Untuk i=Km+1,…,(K+1)m, K=0,…,(T-1) dan j=n+T(i-Km-1)+K+1*

$$\mu_{a_{ij}}(t)=\begin{cases}1 & if \quad t<-1 \\ (-1+d_{ij}-t)/d_{ij} & if \quad -1\le t<-1+d_{ij}, \\ 0 & if \quad t\ge -1+d_{ij,}\end{cases}$$

(ii) *Untuk i=mT+3, …, mT+2+m; K=1,…m dan j=n+T(K-1)+1,…,n+TK*

$$\mu_{a_{ij}}(t)=\begin{cases}1 & if \quad t<p_{j-n-T(K-1)}, \\ (p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij}-t)/d_{ij} & if \quad p_{j-n-T(K-1)}\le t<p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij}, \\ 0 & if \quad t\ge p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij,}\end{cases}$$

dimana $t\in R$ dan $d_{ij}>0$ untuk semua $i=1,\cdots,mT+m+2,$ $K=0,\cdots,(T-1)$ dan $j=1,\cdots,n+mT$. Untuk kefuzzian pada masalah ini, pertama dibentuk fungsi objektif fuzzy. Hal ini dengan menghitung batas atas dan batas bawah dari nilai optimal petama. Batas-batas nilai optimal z_ℓ dan z_u diperoleh dari penyelesaian masalah standar pemrograman linear.

$$z_1 = maksimasi \quad \varphi(X) \tag{4.4}$$

$$kendala \quad \sum_{j=1}^{n+mT} a_{ij}X_j \le b_i,\ i=1,\ldots,mT+m+2 \tag{4.5}$$

$$X_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n+mT, \tag{4.6}$$

dan

$$z_2 = maksimasi \quad \varphi(X) \tag{4.7}$$

$$kendala \quad \sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}X_j \le b_i,\ \ i=1,\ldots,mT+m+2 \tag{4.8}$$

$$X_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n+mT, \tag{4.9}$$

dimana

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} -r_{ij} + d_{ij} & , j = 1,\dots,n, i = i = Km+1,\dots,(K+1)m, K = 0,\dots,(T-1) \\ -1 + d_{ij} & , i = Km+1,\dots,(K+1)m, K = 0,\dots,(T-1)\ and\ j = n+1,\dots,n+T(i-1)+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + d_{ij} & , j = 1,..,n, i = mT+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} -1 + d_{ij} & , j = 1,..,n, i = mT+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} p_{j-n-T(K-1)} + d_{ij} & , j = n+T(K-1)+1,\dots,n+TK\ dan\ K = 1,\dots,m, i = mT+3,\dots,mT+m+2 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

Fungsi objektif diberikan antara z_1 dan z_2 juga koefisien teknologi antara a_{ij} dan $a_{ij} + d_{ij}$. Berikan $z_\ell = \min(z_1, z_2)$ dan $z_u = \max(z_1, z_2)$. Maka z_ℓ dan z_u secara berturut- turut disebut batas bawah dan batas atas dari nilai optimal.

Asumsi 4.2. Supian 2007 [31,32] *Linear crisp pada masalah (4.4)-(4.6) dan (4.7)-(4.9) menpunyai nilai optimal terbatas. Dalam kasus ini himpunan fuzzy dari nilai optimal, G, dimana G adalah subset dari* R^n*, ditentukan pada* Gasimov, 2002,

$$\mu_G(X) = \begin{cases} 0 & if\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j < z_\ell \\ (\sum_{j=1}^{n} c_j X_j - z_\ell)/(z_u - z_\ell) & if\ z_\ell \le \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \le z_u \\ 1 & if\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \ge z_u . \end{cases} \quad (4.10)$$

Himpunan fuzzy pada kendala ke-i, C_i, yang merupakan subset dari R^m, didefinisikan:

(i) 1. Untuk $i=Km+1,\dots,(K+1)m$ dan $K=0,\dots,(T-1)$

$$\mu_{C_i}(X)=\begin{cases}0 & ,b_i<-\sum_{j=1}^{n} r_{ij}X_j\\ (b_i-\sum_{j=1}^{n}-r_{ij}X_j)/\sum_{j=1}^{n} d_{ij}X_j & ,-\sum_{j=1}^{n} r_{ij}X_j\le b_i<\sum_{j=1}^{n}(-r_{ij}+d_{ij})X_j\\ 1 & ,b_i\ge\sum_{j=1}^{n}(-r_{ij}+d_{ij})X_j\end{cases}\qquad(4.11)$$

(ii) 2. untuk $i=Km+1,\ldots,(K+1)m,$ dan $K=0,\ldots,(T-1)$

$$\mu_{C_i}(X)=\begin{cases}0 & ,b_i<-\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j\\ (b_i+\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j)/\sum_{j=1}^{n} d_{ij}X_j & ,-\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j\le b_i<\sum_{j=n+1}^{n(i,K)}(-1+d_{ij})X_j\\ 1 & ,b_i\ge\sum_{j=n+1}^{n(i,K)}(-1+d_{ij})X_j\end{cases}\qquad(4.12)$$

dimana $n(i,K)=n+T(i-Km-1)+K+1$

(iii) Untuk $i=mT+3, \ldots, mT+2+m$ dan $K=1,\ldots, m$

$$\mu_{C_i}(X)=\begin{cases}0 & ,b_i<\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j\\ (b_i-\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j)/\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} d_{ij}X_j & ,\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j\le b_i<\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK}(p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij})X_j\\ 1 & ,b_i\ge\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK}(p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij})X_j\end{cases}\qquad(4.13)$$

Dengan menggunakan definisi keputusan fuzzy dari Bellman and Zadeh, 1970, didapatkan

$$\mu_D(X)=\min(\mu_G(X),\min_j(\mu_{C_j}(X)),$$

sehingga

$$\max_{x\ge0}(\mu_D(X))=\max_{x\ge0}\min(\mu_G(X),\min_j(\mu_{C_j}(X)).$$

Konsekuensinya, masalah (4.1)-(4-3) menjadibentuk optimisasi di bawah ini

$$maksimasi \quad \lambda \tag{4.14}$$

$$\mu_G(X) \geq \lambda \tag{4.15}$$

$$\mu_{C_i}(X) \geq \lambda \quad 1 \leq i \leq mT + m + 2 \tag{4.16}$$

$$X_j \geq 0\,,\; 0 \leq \lambda \leq 1\,,\; j = 1,\ldots,mT\,. \tag{4.17}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.10) dan (4.11)-(4.13), dapat dirumuskan teorema berikut:

Teorema 4.1 Supian 2007 [31,32] *Masalah* (4.1)-(4.3) *direduksi menjadi salah satu dari masalah crisp berikut ini*:

$$maksimasi \quad \lambda \tag{4.18}$$

$$\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 \leq 0 \tag{4.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda) X_j - b_i \leq 0\,, i = 1,\ldots,mT + m + 2 \tag{4.20}$$

$$X_j \geq 0\,,\;\; 0 \leq \lambda \leq 1\,,\; j = 1,\ldots,mT\,, \tag{4.21}$$

dimana

$$\hat{a}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} -r_{ij} + \lambda d_{ij} & , j = 1,\ldots,n, Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1) \\ -1 + \lambda d_{ij} & , i = Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1)\ dan\ j = n+1,\ldots,n+T(i-1)+1 \\ \lambda d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 1 + \lambda d_{ij} & , j = 1,..,n, i = mT + 1 \\ \lambda d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} -1 + \lambda d_{ij} & , j = 1,..,n, i = mT + 2 \\ \lambda d_{ij} & , \quad lainnya \quad . \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} p_{j-n-T} + \lambda d_{ij}, & j = n + T(K-1) + 1, \cdots, n + TK, i = mT + 3 + m + 2 \\ \lambda d_{ij} & , lainnya\,. \end{cases}$$

Perlu diperhatikan bahwa, kendala pada (4.18)-(4.21) memuat cross product dari λX_j adalah tidak konveks.

5. Solusi permasalahan defuzzifikasi

Pada bagian ini, akan dibahas metode modifikasi subgradient, Gasimov 2002 dan ini akan digunakan untuk penyelesaian masalah defuzzifikasi (4.18)-(4.21). Sebagai catatan bahwa, secara umum kendala pada (4.18)-(4.21) adalah non-konveks. Model ini diselesaikan dengan metode himpunan *decisive fuzzy*, yang dibahas oleh Sakawa dan Yana 1995, atau metode linearisasi oleh Kettani dan Oral, 1990.

5.1. Aplikasi metode modifikasi subgradient pada masalah pemrograman linear.

Penggunaan metode subgradien Gasimov 2002 pada masalah (4.18)-(4.21), pertama dibentuk model kendala persamaan dengan variabel slak y_0 dan y_i dan ditulis sebagai berikut:

$$\textit{maksimasi } \lambda \tag{5.1}$$

$$g_0(X,\lambda,y_0) = \lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0 = 0 \tag{5.2}$$

$$g_i(X,\lambda,y_i) = \sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda) X_j - b_i + y_i = 0\,,\ i = 1,\ldots,mT+m+2 \tag{5.3}$$

$$X_j \geq 0\,,\ y_0, y_i \geq 0\,,\ 0 \leq \lambda \leq 1\,,\ j = 1,\ldots,mT\,,\ i = 1,\ldots,mT+m+2. \tag{5.4}$$

Untuk masalah ini definisikan himpunan *S*:

$$S = \{(X,p,\lambda) \,|\, X = (X_1,\ldots,X_n), y = (y_1,\ldots,y_n), X_i \geq 0, y_0, y_i \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1\}\,.$$

Karena $\max\lambda = -\min(-\lambda)$ dan $g(X,\lambda,p) = (g_0,\ldots,g_m)$ augmented Lagrangian yang bersesuaian dengan masalah (5.1)-(5.4) dapat ditulis dalam bentuk:

$$L(x,u,c) = -\lambda + c\left[\left\{\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right\}^2 + \sum_{i=1}^{mT+m+2}\left(\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i + y_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$-\mu_0\left(\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right) - \sum_{i=1}^{mT+m+2} u_i\left(\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i + y_i\right).$$

Sebagai ilustrasi pada (5.1)-(5.4) dilakukan dengan cara:

*Tahap Inisialisasi***.** Pilih vektor $(u_0^1, u_1^1, ..., u_{mT+m+2}^1, c^1)$ dengan $c^1 \geq 0$, ambil $k = 1$, dan lanjutkan ke tahap utama.

Tahap Utama.

Tahap 1 **.** Berikan $(u_0^k, u_1^k, ..., u_{mT+m+2}^k, c^k)$ *;* selesaikan submasalah di bawah ini:

$$\min -\lambda + c\left[\left\{\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right\}^2 + \sum_{i=1}^{mT+m+2}\left(\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda) X_j - b_i + y_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$-u_0\left(\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right) - \sum_{i=1}^{mT+2} u_i\left(\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda) X_j - b_i + y_i\right).$$

$$(X, y, \lambda) \in S.$$

Berikan (X^k, y^k, λ^k) suatu solusi. Jika $g(X^k, y^k, \lambda^k)$, maka berhenti; $(u_0^k, u_1^k, ..., u_{mT}^k, c^k)$ adalah penyelesaian masalah dual, (X^k, λ^k) adalah penyelesaian masalah (4.18)-(4.21). Lainnya, *lanjutkan ke tahap 2*.

Tahap 2 **.** Berikan

$$u_0^{k+1} = u_0^k - h^k\left(\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_2 + y_0\right)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - h^k\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}(\lambda) X_j - b_i + y_i\right), Km+1 \leq i \leq (K+1)m \text{ dan } 0 \leq K \leq T-1$$

$$c^{k+1} = c^k + (h^k + \varepsilon^k)\|g(x_k)\|$$

dimana h^k dan ε^k adalah skalar positif (*stepsizes*) dan $h^k > \varepsilon^k > 0$, ganti k dengan $k+1$; dan kembali ke Tahap 1.

5.2. Algoritma metode himpunan keputusan fuzzy

Metode ini adalah didasari dari ide bahwa, untuk nilai tetap λ; masalah (4.18)-(4.21) adalah masalah pemrograman linear, Gasimov 2002. λ^* solusi optimal dari masalah (4.18)-(4.21) adalah ekuivalen dengan menentukan nilai maksimum λ (himpunan *feasible* tidak kosong).

Algoritma untuk masalah (4.18)-(4.21) adalah sebagai berikut:

Algoritma

***Tahap* 1.** Berikan λ = 1 dan lakukan pengujian himpunan feasibel yang memenuhi kendala pada probelm (4.18)-(4.21). Jika himpunan feasibel ada, berikan λ = 1*:* Lainnya, berikan himpunan $\lambda^L = 0$ dan $\lambda^R = 1$ dan lanjutkan pada Tahap 2 berikut.

***Tahap* 2.** Untuk nilai dari $\lambda = (\lambda^L + \lambda^R)/2$*;* perbaiki nilai dari λ^L dan λ^R dengan menggunakan metode *bisection* di bawah ini:

$\lambda^L = \lambda$ jika himpunan *feasible* tidak kosong untuk λ

$\lambda^R = \lambda$ *j*ika himpunan feasibel adalah kosong untuk λ.

Konsekwensi, untuk setiap λ, baik dengan adanya himpunan *feasible* dari (4.18)-(4.21) atau tidak menggunakan *fase* satu dari metode simpleks dan menggambarkan nilai maksimum λ^* yang memenuhi kendala pada (4.18)-(4.21).

6. *Mean Downside-Risk Freamwork*

Para investor dalam prakteknya konsentrasi pada risiko bahwa nilai portofolio jatuh pasti lebih rendah dari suatu *level* . Jika dinotasikan *v* adalah nilai portofolio diakhir periode, dengan probabilitas $P(v < VaR)$, untuk nilai portofolio jatuh lebih rendah dari tingkat VaR , disebut *shortfall probability*, dan *expected shortfall* adalah , *mean absolute deviation* $E(|v - E(v)| \, v < E(v)$, dan semi-varians $E((v - E(v)^2 \; | \, v < VaR)$, jika $x_j, (j = \overline{1,n})$ merepresentasikan proporsi pada total jumlah uang yang disimpan pada sekuritas *j*, l_j dan $u_j, (j = \overline{1,n})$ masing-masing menotasikan proporsi minimum dan maksimum pada total jumlah uang yang disimpan pada sekuritas *j*.

Berikan $r_j, (j = \overline{1,n})$ adalah variabel acak yang merepresentasikan *rate of return* pada sekuritas, sehingga $v = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$.

Asumsikan bahwa investor ingin mengalokasikan sebagian kekayaannya n risiko sekuritas. Jika profil risiko pada investor ditentukan dalam bentuk *VaR*, maka solusi *mean-VaR* portofolio efisien dapat diselesaikan dengan permasalahan optimisasi berikut, (Inuiguchi, 2000):

$$(\mathrm{P}_1)\qquad \begin{aligned} &\underset{x}{maksimasi} \quad E(v) \\ &kendala \quad P(v < VaR) \le \beta, \\ &\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ &\qquad\qquad l_j \le x_j \le u_j,\ j = 1,\cdots n. \end{aligned}$$

Model (P_1) ini menunjukkan bahwa investor mencoba memaksimumkan nilai portofolio untuk waktu yang akan datang, yang membutuhkan probabilitas bahwa nilai portofolio yang akan datang mendekati *VaR* dengan tidak lebih dari β .

7. Kasus model proposional *transaction cost*

Biaya tansaksi adalah salah satu dari sumber yang menjadi perhatian dari manajer portofolio. Arnott dan Wagner, 1990 menemukan bahwa *transaction costs* akan mempengaruhi inefisien portofolio. Yoshimoto's empirical analysis, 1996 juga menyimpulkan yang sama.

Jika diasumsikan bahwa tingkat *transaction cost* pada sekuritas $j\ (j = \overline{1,n})$ adalah c_j dan *transaction cost* pada sekuritas $j\ (j = \overline{1,n})$ adalah $c_j x_j$, sehingga *tansaction cost* pada portofolio $x = (x_1,...,x_n)$ adalah $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Dengan mempetimbangkan *tansaction cost* dan kendala *shortfall probability*, diperoleh model mean *VaR* portofolio seleksi dengan *transaction cost* adalah

$$
(\mathrm{P}_2)\qquad \begin{aligned}
&\underset{x}{maksimasi} \quad E(v) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&kendala \quad P(v < VaR) \le \beta, \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
&\qquad\qquad l_j \le x_j \le u_j,\ j = 1, \cdots n.
\end{aligned}
$$

8. Pengembangan model

Jika model di atas diterapkan pada multi asset, Supian 2007 [31, 35, 36], maka nilai portofolio diakhir periode $v_i, i = \overline{1,q}$, $P(v_i < (VaR)_i), i = \overline{1,q}$, *expected shortfall* adalah $E(v_i | v_i < (VaR)_i)$, *mean absolute deviation* $E(|v_i - E(v_i)|\ v_i < E(v_i))$, dan semi-varians $E((v_i - E(v_i))^2 \ | v_i < E(v_i))$, jika $x_j, (j = \overline{1,n})$ merepresentasikan proporsi pada total uang yang disimpan pada sekuritas *j*, l_{1j} dan $u_{2j}, (j = \overline{1,n})$ berturut-turutut menotasikan proporsi minimum dan maksimum pada total jumlah uang yang simpan pada sekuritas *j* adalah variabel acak yang merepresentasikan rate of *i* return pada sekuritas *j*. Untuk $j = \overline{1,n}$ dan $i = \overline{1,q}$, berikan $r_{ji}, j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,q}$ adalah variabel acak yang merepresentasikan rate of *i* return pada sekuritas *j* adalah $v_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} x_j$.

Asumsikan bahwa investor mengalokasikan sebagian kekayaannya *n* risiko sekuritas. Jika profil risiko pada investor ditentukan dalam bentuk $(VaR)_i, i = \overline{1,q}$, maka solusi mean-*VaR* portofolio efisien dapat diselesaikan dengan permasalahan optimisasi berikut, (Supian, 2007 [31, 35])

$$\underset{x \in R^n}{maksimasi} \quad [E(v_1), \cdots E(v_q)] \tag{8.1}$$

$$kendala \quad \Pr\{\ v_i \le VaR)_i\ \} \le \beta_i,\ i = \overline{1,q} \tag{8.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{8.3}$$

$$M_{1j} \le x_j \le M_{2j}, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{8.4}$$

Model ini menunjukkan bahwa investor mencoba memaksimumkan nilai portofolio untuk waktu yang akan datang, yang membutuhkan probabilitas bahwa nilai portofolio yang akan datang mendekati (*VaR*)*i* dengan tidak lebih dari $\beta_i, i = \overline{1,q}$.

9. Kasus model proposional *transaction cost*

Jika diasumsikan bahwa *rate of transaction cost* pada sekuritas $j\ (j = \overline{1,n})$ dan dialokasikan pada $i, i = \overline{1,q}$ aset adalah c_{ji}. *Transaction cost* pada sekuritas j dan di alokasikan pada i aset adalah $c_j x_j$. *Transaction cost* pada portofolio $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ adalah $\sum_{j=1}^{n} c_{ji} x_j,\ i = \overline{1,q}$. Dengan mempetimbangkan *tansaction cost* dan kendala *shortfall probability*, maka model mean *VaR* portofolio seleksi dengan *transaction cost* adalah

$$\underset{x \in R^n}{maksimasi} \quad [E(v_1) - \sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j, \cdots E(v_q) - \sum_{j=1}^{n} c_{jq} x_j] \tag{9.5}$$

$$kendala \quad \Pr\{\ v_i \le VaR)_i\ \} \le \beta_i,\ i = \overline{1,q} \tag{9.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{9.7}$$

$$M_{1j} \le x_j \le M_{2j}, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{9.8}$$

10. Model posibilistik mean *VaR* portofolio seleksi

10.1 Teori posibilistik

Dasar dari konsep dan teknik dari teori *possibility* dikemukakan oleh Zadeh, 1970. Misalkan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dua bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan masing-masing berturut-turut $\mu_{\tilde{a}}$ *dan* $\mu_{\tilde{b}}$ dan $\mu_{\tilde{b}}$, maka possibilitas dari $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ didefinisikan sebagai berikut: (Dubois dan Prade 1990),

$$\begin{cases} Pos(\tilde{a} \le \tilde{b}) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \le y\}, \\ Pos(\tilde{a} < \tilde{b}) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x, y \in \mathbb{R}, x < y\}, \\ Pos(\tilde{a} = \tilde{b}) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Jika $\tilde{b}$ adalah suatu bilangan crisp (*invariabel*) *b,* didapat

$$\begin{cases} Pos\{\tilde{a} \le b\} = \sup\{\mu_{\tilde{a}}(x) \mid x \in \mathbb{R}, x \le b\} \\ Pos\{\tilde{a} < b\} = \sup\{\mu_{\tilde{a}}(x) \mid x \in \mathbb{R}, x < b\} \\ Pos(\tilde{a} = b\} = \mu_{\tilde{a}}(b) \end{cases} \tag{10.2}$$

Untuk $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suatu operasi dengan bilangan biner dari himpunan fuzzy. Jika dinotasikan bilangan fuzzy $\tilde{a}, \tilde{b}$ bilangan $\tilde{c} = f(\tilde{a}, \tilde{b})$, maka fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{c}}$ dapat diurunkan dari fungsi keanggoaan $\mu_{\tilde{a}}$ dan $\mu_{\tilde{b}}$ dengan

$$\mu_{\tilde{c}}(z) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x, y \in \mathbb{R}, z = f(x, y)\} \tag{10.3}$$

Untuk suatu $z \in \mathbb{R}$. Jadi, posibilistik bahwa bilangan fuzzy $\tilde{c} = f(\tilde{a}, \tilde{b})$ mempunyai nilai $z \in \mathbb{R}$ adalah lebih besar dari kombinasi kemungkinan dari bilangan riil *x,y* sedemikian *z = f(x,y)*, dimana nilai $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ berturut-turut x dan y.

10.2 Bilangan *trapezoidal fuzzy*

Rate of return pada sekuritas diberikan dengan bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ dimana $r_1 < r_2 \le r_3 < r_4$. Maka fungsi keangotaan bilangan fuzzy $\tilde{r}$ diformulasikan:

$$\mu_{\tilde{r}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - r_1}{r_2 - r_1} & , r_1 \le x \le r_2, \\ 1 & , r_2 \le x \le r_3, \\ \dfrac{x - r_4}{r_3 - r_4} & , r_3 \le x \le r_{4,} \\ 0 & , lainnya. \end{cases} \qquad (10.4)$$

Ambil *rate of return* pada sekuritas dengan bilangan trapezolidal fuzzy $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ dimana $r_1 < r_2 \le r_3 < r_4$. Maka fungsi keanggotaan dari fuzzy $\tilde{r}$ dapat ditulis:

$$\mu_{\tilde{r}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - r_1}{r_2 - r_1} & , r_1 \le x \le r_2, \\ 1 & , r_2 \le x \le r_3, \\ \dfrac{x - r_4}{r_3 - r_4} & , r_3 \le x \le r_{4,} \\ 0 & , lainnya. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Jika diambil dua trapezoidal bilangan fuzzy $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ dan $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, seperti terlihat pada Gambar 10.1.

Jika $r_2 \le b_3$, maka diperoleh:

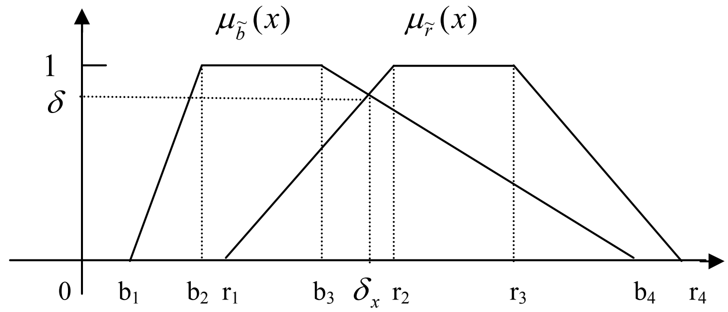
$$Pos\left(\tilde{r} \le \tilde{b}\right) = \sup\left\{ \min\{\mu_{\tilde{r}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\} \middle| \, x \le y \right\}$$

$$\ge \min\left\{ \mu_{\tilde{r}}(r_2), \mu_{\tilde{b}}(b_3) \right\} = \min\{1,1\} = 1,$$ mengakibatkan bahwa $Pos(\tilde{r} \le \tilde{b}) = 1$.

Jika $r_2 \ge b_3$ dan $r_1 \le b_4$, mengakibatkan $Pos(\tilde{r} \le \tilde{b}) = 1$. Jika $r_2 \ge b_3$ dan $r_1 \le b_4$ maka suprimum adalah δ_x yang merupakan irisan dari dua fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{r}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{b}}(x)$, dimana $\delta_x = r_1 + (r_2 - r_1)\delta$.

Jika $r_1 > b_4$, maka untuk suatu $x < y$, satu dari persamaan

$\mu_{\tilde{r}}(x) = 0,\ \mu_{\tilde{b}}(y) = 0$, benar.



Gambar 10.1: Dua *trapezoidal* bilangan fuzzy $\tilde{r}$ dan $\tilde{b}$.

Jadi diperoleh $Pos\left(\tilde{r} \le \tilde{b}\right) = 0$.

Kemudian dapat disimpulkan bahwa

$$Pos\left(\tilde{r} \le \tilde{b}\right) = \begin{cases} 1, & r_2 \le b_3, \\ \delta, & r_2 \ge b_3,\, r_1 \le b_4, \\ 0, & r_1 \ge b_4. \end{cases} \tag{10.6}$$

Secara khusus, dimana $\tilde{b}$ adalah bilangan 0, maka diperoleh

$$Pos\left(\tilde{r} \le 0\right) = \begin{cases} 1, & r_2 \le 0, \\ \delta, & r_1 \le 0 \le r_2, \\ 0, & r_1 \ge 0, \end{cases} \tag{10.7}$$

dimana

$$\delta = \frac{r_1}{r_1 - r_2}. \tag{10.8}$$

Perhatikan lemma berikut:

Lemma 10.1 (Dubois dan Prade, 1990) *Ambil* $\tilde{r} = \left(r_1, r_2, r_3, r_4\right)$ *adalah bilangan trapezoidal fuzzy. Maka untuk suatu tingkat konfiden* α *dengan* $0 \le \alpha \le 1$, $Pos(\tilde{r} \le 0) \ge \alpha$, *jika dan hanya jika* $(1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \le 0$.

Himpunan bilangan fuzzy $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ dengan tingkat (level) λ adalah suatu himpunan bagian crisp dari R dan dinotasikan $[\tilde{r}]^\lambda = \{x | \mu(x) \geq \lambda, x \in R\}$, dengan mengacu pada Carlsson 2002, diperoleh

$$[\tilde{r}]^\lambda = \{x | \mu(x) \geq \lambda, x \in R\} = [r_1 + \lambda(r_2 - r_1), r_4 - \lambda(r_4 - r_3)].$$

Level λ dari bilangan fuzzy $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ adalah himpunan crisp dari R dan dinotasikan dengan $[\tilde{r}]^\lambda = \{x | \mu(x) \geq \lambda, x \in R\}$, maka dengan mengacu pada Carlsson 2001, didapat

$$[\tilde{r}]^\lambda = \{x | \mu(x) \geq \lambda, x \in R\} = [r_1 + \lambda(r_2 - r_1), r_4 - \lambda(r_4 - r_3)].$$

Jika diberikan $[\tilde{r}]^\lambda = [a_1(\lambda), a_2(\lambda)]$, posibilistik nilai rata-rata crisp dari $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ adalah $\tilde{E}(\tilde{r}) = \int_0^1 \lambda(a_1(\lambda) + a_2(\lambda))d\lambda$, dimana $\tilde{E}$ *adalah operator mean.*

Dapat diuraikan jika $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$, maka trapezoidal fuzzy number adalah

$$\tilde{E}(\tilde{r}) = \int_0^1 \lambda(r_1 + \lambda(r_2 - r_1) + r_4 - \lambda(r_4 - r_3))d\lambda = \frac{r_2 + r_3}{3} + \frac{r_1 + r_4}{6}. \quad (10.9)$$

10.3 Formulasi portofolio efisien

Ambil x_j adalah proposional dari total sejumlah uang yang disimpan sekuritas *j*, M_{1j} dan M_{2j} berturut-turut menotasikan proporsi minimum dan maximum dari total semua uang yang dipilih pada sekuritas j. Bilangan trapezoidal fuzzy dari r_{ji} adalah $\tilde{r}_{ji} = (r_{(ji)1}, r_{(ji)2}, r_{(ji)3}, r_{(ji)4})$ dimana $r_{(ji)1} < r_{(ji)2} \leq r_{(ji)3} < r_{(ji)4}$. Jika tingkat $(VaR)_i$ dengan bilangan trapezoidal $\tilde{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})$, $i = \overline{1, q}$.

Dengan pendekatan ini perhatikan model pada (9.5)-(9.8) dapat direduksi dari teorema berikut: (Supian 2007 [34])

Teorema 10.1 *Posibilistik mean VaR portofolio seleksi untuk vector mean VaR , model efficient portofolio* (9.5)-(9.8) *adalah*

$$\underset{x\in R^n}{maksimasi}\left\{\widetilde{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{r}_{j1}x_j\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{j1}x_j,...,\widetilde{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{r}_{jk}x_j\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jk}x_j\right\} \quad (10.10)$$

$$kendala \quad Pos\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{r}_{ji}x_j<\widetilde{b}_i\right)\le\beta_i,\ i=\overline{1,q}, \quad (10.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=1, \quad (10.12)$$

$$M_{1j}\le x_j\le M_{2j},\quad j=\overline{1,n}. \quad (10.13)$$

Dengan menggunakan White 1995, Teorema 10.1 dapat dikembangkan menjadi teorema sebagai berikut: Supian 2007 [,31, 32, 35]

Teorema 10.2. *Jika* $\lambda_i>0,\ i=\overline{1,q}$*, maka efscien portofolio untuk model posibilistik adalah solusi optimal dari permasalahan di bawah ini:*

$$\underset{x\in R^n}{maksimasi}\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left[\widetilde{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{r}_{ji}x_j\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{ji}x_j\right] \quad (10.13)$$

$$kendala \quad Pos\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{r}_{ji}x_j<\widetilde{b}_i\right)\le\beta_i,\ i=\overline{1,q}, \quad (10.14)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=1, \quad (10.15)$$

$$M_{1j}\le x_j\le M_{2j},\quad j=\overline{1,n}. \quad (10.16)$$

Dengan menggunakan tingkat return pad a sekuritas $j\ (j=\overline{1,n})$ dengan bilangan trapezoidal fuzzy, maka dapat dirumuskan teorema berkut: Supian 2007 [31,32,35]

Teorema 10.3 *Rate of return pada sekurtias* $j\ (j=\overline{1,n})$ *dengan bilangan trapezoidal fuzzy* $\widetilde{r}_{ji}=\left(r_{(ji)1},r_{(ji)2},r_{(ji)3},r_{(ji)4}\right)$ *dimana* $r_{(ji)1}<r_{(ji)2}\le r_{(ji)3}<r_{(ji)4}$ *dan* $\widetilde{b}_i=\left(b_{i1},b_{i2},b_{i3},b_{i4}\right)$*adalah trapezoidal fuzzy number untuk VaR level dan* $\lambda_i>0$*,dengan* $i=\overline{1,q}$*, maka dengan menggunakan model possibilistic mean VaR portofolio seleksi, efisien portofolio adalah solusi optimal dari permasalahan berikut:*

$$\underset{x\in R^n}{maks} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)3} x_j}{3} + \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)4} x_j}{6} - \sum_{j=1}^{n} c_{ji} x_j \right] \quad (10.17)$$

$$kendala \quad (1-\beta_i)\left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j - b_{i4} \right) + \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j - b_{i3} \right) \geq 0, \quad 1 = \overline{1,q} \quad (10.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad (10.19)$$

$$M_{1j} \leq x_j \leq M_{2j}, \quad j = \overline{1,n}. \quad (10.20)$$

Proof : Dari persamaan (10.9), diperoleh:

$$\widetilde{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{r}_{ji} x_j \right) = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)3} x_j}{3} + \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)4} x_j}{6}, \quad i = \overline{1,q}.$$

Dari Lemma 10.1, diperoleh:

$$Pos\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{r}_{ji} x_j < \widetilde{b}_i \right) \leq \beta_i, \quad i = \overline{1,q}, \text{ is equivalent with}$$

$$(1-\beta_i)\left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j - b_{i4} \right) + \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j - b_{i3} \right) \geq 0.$$

Juga, dari (10.17)-(10.20) dengan menggunakan Teorema 10.2, diperoleh bentuk berikut:

$$\underset{x\in R^n}{maks} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)3} x_j}{3} + \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{(ji)4} x_j}{6} - \sum_{j=1}^{n} c_{ji} x_j \right] \quad (10.21)$$

$$kendala \quad (1-\beta_i)\left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)1} x_j - b_{i4} \right) + \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} r_{(ji)2} x_j - b_{i3} \right) \geq 0, \quad (10.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad (10.23)$$

$$M_{1j} \le x_j \le M_{2j}, \quad j = \overline{1,q}\,. \quad \square \qquad (10.24)$$

Permasalahan (10.21)-(10.24) adalah standar dari permasalahan pemrograman linear multi-objektif. Untuk mencari solusi optimal dapat menggunakan algoritma dari pemrograman multi-objektif Caballero, 2001, Preda, 1993.

11. Contoh Kasus

Sebagai ilustrasi untuk model posibilistik mean *VaR* portofolio seleksi, misalkan permasalahan 5-sekuritas dengan distribusi possibiliti berikut : (Guohua, 2006)

$r_1 = (0.04, 0.05, 0.06, 0.07)$, , $r_2 = (0.04, 0.06, 0.065, 0.07)$,

$r_3 = (0.048, 0.68, 0.075, 0.08)$, $r_4 = (0.05, 0.065, 0.07, 0.01)$,

$r_5 = (0.05, 0.075, 0.085, 0.116)$.

VaR level adalah $\tilde{b} = (0.04, 0{,}046, 0.048, 0.05)$. *Rates* dari *transaction costs* pada sekuritas adalah $c_1 = 0, c_2 = 0.001, c_3 = 0.001, c_4 = 0.002, c_5 = 0.003$.

Untuk β =0.01, maka

$$\underset{x}{maks}\ \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{j2}x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{j3}x_j}{3} + \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{j1}x_j + \sum_{j=1}^{n} r_{j4}x_j}{6} - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$kendala \ \ (1-\beta)\sum_{j=1}^{n} r_{j1}x_j - b_4) + \beta\left(\sum_{j=1}^{n} r_{j2}x_j - b_3\right) \ge 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

$$l_j \le x_j \le u_{j.}$$

$$j = \overline{1,n}.$$

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{Maks} \quad 0.055x_1 + 0.059x_2 + 0.068x_3 + 0.067x_4 + 0.078x_5 \\
&kendala \;\; 0.0401x_1 + 0.0402x_2 + 0.0482x_3 + 0.5015x_4 + 0.5025x_5 \geq 0{,}04998 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
&0 \leq x_j \leq 0{,}05, \quad j = \overline{1{,}5}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan model pemrograman linear diperoleh hasil (0, 0, 0.112821, 0.387179, 0.50), dan nilai optimal 0.0731128. Portofolio optimal adalah (0, 0, 0.112821, 0.387179, 0.50), *possibility return* optimal = 0.0731128.

Dengan cara yang sama bisa dicari untuk nilai β=0.03, β=0.05 dst.

Kesimpulan

Dalam karya ilmiah ini, mempertimbangkan distribusi possibility trapezoidal sebagai distribusi possibility dari rate of returns dalam sekuritas dan mengusulkan sebuah model possibilistic mean *VaR* portofolio. Sebuah pendekatan pemrograman posibilistik yang berbasis pada fuzzy *VaR* telah diusulkan. Masalah pemrograman posibilistik dapat diselesaikan dengan mentranformasinya ke dalam masalah pemrograman linear yang berbasis teori posibilistik. Model posibilistik ini kemudian dikembangkan dengan menggunakan faktor pembobot oleh Supian, 2007 [31, 32, 36] dengan mengacu pada model dasar Fuller dan Majlender, 2002. Sebagai implementasi model ini diberikan contoh numerik untuk memberikan gambaran bahwa metode yang diusulkan dapat digunakan secara efisien untuk menyelesaikan masalah pemilihan portofolio.

Daftar pustaka

[1] Andrzej Ruszczynsk and Robert J. Vanderbei, “*Frontiers of stochastically nondominated portofolio*” Operations research and financial engineering, Princeton University, ORFE -0-01,2002.

[2] Arnott, R.D. and Wanger, W.H., *The measurement and control of trading costs*, Financial Analysts Journal, 46(6), 73-80, 1990.

[3] Bellman, R. and Zadeh, L.A., *Decision making in a fuzzy environment*, Management Science, 17, 141-164, 1970.

[4] Birge, J.R. and Louveaux, F.V., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York, 1997.

[5] Caballero R., Cerda E., Munoz M. M., L. Rey, and I. M. Stancu Minasian, *Efficient solution concepts and their relations in stochastic multi-objective programming*. Journal of Optimization Theory and Applica-tions, 110(1):53-74, 2001.

[6] Carlsson, C. and Fuller, R., *On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers*, Fuzzy sets and systems, 122, 315-326, 2001.

[7] Carlsson, C., Fuller, R. and Majlender, P., *A possibilistic approach to selecting portofolios with highest utilty score*, Fuzzy sets and systems, 131, 13-21, 2002.

[8] Dentcheva, D. and Ruszczynski, A, *Optimization under linear stochastic dominance*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 56, No. 6, pp. 6–11, 2003.

[9] Dentcheva, D. and Ruszczy´nski, A., *Portofolio Optimization with Stochastic Dominance* Constraints, May 12, 2003.

[10] Darinka Dentcheva *a*nd Ruszczy´nski, A., *Optimization with stochastic dominance constraints*, Siam J. Optim.Society For Industrial And Applied Mathematics Vol. 14, No. 2, Pp. 548–566, 2003.

[11] Dubois, D. and Prade, H., *Possibility theory*, Plenum press, New York 1998.

[12] Fernando, K. F., *Practical Portofolio Optimization*, NAG. Ltd., Wilkinson House Jordan Hill Oxford OX2 8DR.

[13] Fuller, R. and Majlender, P., *On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers*, Turku Centre for Computer Science, 2002.

[14] Gasimov, R. N., Yenilmez K., *Solving fuzzy linear programming probelms with linear membership functions,* Turk J Math. 26 , 375 -396, 2002.

[15] Guohua C., *A possibilistic mean VaR model for portofolio selection,* AMO-Advanced Modeling and Optimization, Vol. 8, No. 1, 2006.

[16] Hanoch, G.and Levy, H., *The efficiency analysis of choices involving risk*, Rev. Econom.Stud., 36, pp. 335–346,1969.

[17] Hull, J. C., White, D. J., *Value-at-risk when daily changes in market variabel are not norm*all*y distributed*, Journal of Derivatives 5, 9-19, 1998.

[18] Inuiguchi, M. and Ramik, J., *Possibilistic linear programming*: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portofolio selection probelm, Fuzzy Sets and Systems, 111, 3-28, 2000.

[19] Hadar, J. and Russell, W., *Rules for ordering uncertain prospects*, Amer. Econom. Rev., 59, pp. 25–34, 1969.

[20] Kettani, O., Oral, M.: *Equivalent formulations of nonlinear integer probelms for eficient optimization*, Management Science Vol. **36** No. 1, 115-119, 1990.
[21] Klir, G.J., Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic-Theory and Applications*, Prentice-Hall Inc. , 574p, 1995.
[22] Lehmann E., *Ordered families of distributions*, Annals of Mathematical Statistics, 26, pp. 399–419, 1955.
[23] Manfred Gilli and Evis K¨ellezi., *A Global Optimization Heuristic for Portofolio Choice with VaR and Expected Shortfall,* This draft: January 2001.
[24] Markowitz, H. M. , *Mean–Variance Analysis in Portofolio Choice and Capital Markets*, Blackwell, Oxford, 1987.
[25] Negoita, C.V.: *Fuzziness in management*, OPSA/TIMS, Miami ,1970.
[26] Quirk, J.P and Saposnik, R., *Admissibility and measurabel utility functions*, Review of Economic Studies, 29, pp. 140–146, 1962.
[27] Rockafellar, R.T. and Uryasev S., *Conditional value-at-risk for general loss distributions,*J. Banking and Finance, 26, pp. 1443–1471, 2002.
[28] Ruszczynski A. and Vanderbei R. J., *Frontiers of stochastic*ally *nondominated portofolios*, Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, ORFE-02-01, 2002.
[29] Rockafellar, R.T. and. Wets, R.J.-B., *Stochastic convex programming: Basic duality ,* Pacific J.Math., 62, pp. 173-195, 1976.
[30] Sakawa, M., Yana, H.: *Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming probelms with fuzy parameters,* Cybernetics Systems **16,** 377-397**,** 1985.
[31] **Supian, S.**, *Contributions to Portofolio Optimization Model,* Teză de Doctorat, Universitatea din Bucureşti, 2007.
[32] **Supian, S.**, "*Mathematical Programming Models for Portofolio Selection*, editura Universităţii din Bucureşti, 2007.
[33] **Supian**, **S.**, Preda, V., *On portofolio optimization using fuzzy decisions,* ICIAM, Elvetia, Zürich, , Juli 2007, InterScience, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Volume 7, Issue 1, Page 2060075**,** 12 Dec 2008
[34] **Supian, S.**, *On possibilistic approach for a portofolio selection*, Romanian Academy, Mathematical Reports, Vol. 9(59). No. 3. 2007.
[35] **Supian, S.**, Popescu, C. and Ghica, M., *.A portofolio selection probelm with a possibilistic approach*, 22ND European Conference on operational research, Prague July 2007.
[36] **Supian, S.**, *.The weighted possibilistic mean variance and covariance of fuzzy numbers,* Journal of Applied Quantitative Methods, vo. 2, No. 3 Fall, 2007.
[37] Tanaka, H., Asai, K.: *Fuzzy linear programming probelms with fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **13,** 1-10**,** 1984.

[38] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K.: *On fuzzy mathematical programming*, J. Cybernetics **3 ,** 37-46**,** 1984.
[39] Uryasev, S. and R.T. Rockafellar, *Conditional value-at-risk: Optimization approach,* in Stochastic Optimization: Algorithms and Applications (Gainesville, FL, 2000), Appl. Optim. 54, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, pp. 411–435, 2001.
[40] White, D. J., *Multiple objective weighting factor auxiliary optimizationprobelms,* J. Multi-Criteria Decision Analysis, 4, 122-132, 1995.
[41] Zimmermann, H.J., *Fuzzy mathematical programming*, Comput. & Ops. Res. Vol. **10** No 4 (1983) 291-298.

LAMPIRAN

Proposisi 3.2 *Jika diasumsikan bahwat* $R_j, j = 1,...,n$*, dan Y berdistribusi diskrit maka permasalahan* (3.5)–(3.7) *adalah ekivalen dengan permasalahan*

$$maks \quad f(x) \tag{3.9}$$

$$kendala \quad \sum_{j=1}^{n} r_{tj} x_j - s_{it} \le -y_i\,,\ i = 1,...,m,\ \ t = 1,...,T\,, \tag{3.10}$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t s_{it} \le F_2(Y; y_i)\,,\ i = 1,...,m, \tag{3.11}$$

$$s_{it} \ge 0\ i = 1,...,m,\ \ t = 1,...,T \tag{3.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le 1 \tag{3.13}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} x_j \le -1 \tag{3.14}$$

$$x_j \ge 0\,, j=1,\ldots,n \tag{3.15}$$

dan hal ini ekivalen terhadap masalah :

$$maks \quad \varphi(X) = maks \quad \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \tag{3.16}$$

$$kendala, \sum_{j=1}^{n+mT} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,...,mT + 2 + m\,, \tag{3.17}$$

$$X_j \ge 0 \quad,\ j = 1,...,n + mT \tag{3.18}$$

dimana $X = (x_1,...,x_n, s_{11},...,s_{1T}, s_{21},...,s_{2T},...,s_{m1},...,s_{mT})$

$$a_{ij} = \begin{cases} -r_{ij} & , j=1,\ldots,n, i=i=Km+1,\ldots,(K+1)m, K=0,\ldots,(T-1) \\ -1 & , i=Km+1,\ldots,(K+1)m, K=0,\ldots,(T-1)\ and\ j=n+1,\ldots,n+T(i-1)+1 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , j=1,..,n, i = mT+1 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & , j=1,..,n,\ i = mT+2 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} p_{j-n-T(K-1)} & , j=n+T(K-1)+1,\ldots,n+TK\ and\ K=1,\ldots,m, i=mT+3,\ldots,mT+m+2 \\ 0 & , lainnya, \end{cases}$$

Permasalahan (3.16)-(3.18) dapat dinyatakan dalam bentuk tabel di bawah ini:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_{11}	s_{12}	$\cdots$	s_{1T}	s_{21}	s_{21}		s_{2T}	$\cdots$	s_{m1}	s_{m2}	$\cdots$	s_{mT}	b_i
$-r_{11}$	$-r_{12}$	$\cdots$	$-r_{1n}$	-1	0	…	0	0	0	…	0	…	0	0	…	0	$\leq -y_1$
$-r_{11}$	$-r_{12}$	$\cdots$	$-r_{1n}$	0	0	…	0	-1	…		0	…	0	0	…	0	$\leq -y_2$
:	:	…	:	:	:	…	:	:	…		:	…	:	:	…	:	:
$-r_{11}$	$-r_{12}$	$\cdots$	$-r_{1n}$	0	0		0	0	…		0	…	0	0	…	-1	$\leq -y_m$
$-r_{21}$	$-r_{22}$	$\cdots$	$-r_{2n}$	0	-1	…	0	0	0			…	0	0	…	0	$\leq -y_1$
$-r_{21}$	$-r_{22}$	$\cdots$	$-r_{2n}$	0	0	…	0	0	-1			…	0	0	…	0	$\leq -y_2$
:	:	…	:	:	:	…	:	:	:			…	:	:	…	:	:
$-r_{21}$	$-r_{22}$	$\cdots$	$-r_{2n}$	0	0		0	0	0			…	0	-1	…	0	$\leq -y_m$
:	:	:	:	:	:	…	:	:	:	:		:	:	:	:	:	:
$-r_{T1}$	$-r_{T2}$	$\cdots$	$-r_{Tn}$	0	0	…	-1	0	0	…	0	…	0	0	…	0	$\leq -y_1$
$-r_{T1}$	$-r_{T2}$	$\cdots$	$-r_{Tn}$	0	0		0	0	-1	…	0	…	0	0	…	0	$\leq -y_2$
								:	:	…	:	…	:	:	…	0	:
$-r_{T1}$	$-r_{T2}$	$\cdots$	$-r_{Tn}$	0	0		0	0	0	…	0	…	0	0	…	-1	$\leq -y_m$
1	1	…	1	0	0		0	0		0		…	0	0	…	0	1
-1	-1	…	-1	0	0	…	0	0	…	0		…	0	0	…	0	-1

0	0	…	0	p_1	p_2	$\cdots$	p_T	0	…	0		…	0	0	…	0	$F_2(Y,y_1)$
0	0	…	0	0	0	…	0	p_1	…	p_T		…	0	0	…	0	$F_2(Y,y_2)$
:	:	:	:	:	:	…	:	:	:	:		:	:	:	:	:	:
0	0	…	0	0	0	…	0	0	…	0		…	p_1	p_2	$\cdots$	p_T	$F_2(Y,y_m)$