OPTIMALISASI WAKTU INVESTASI DENGAN *FUZZY REAL OPTION*

Sudradjat[1], Elis Hertini[2], Andine Astiany[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung-Sumedang km 21 Jatinangor
[1]adjat03@yahoo.com, [2]elishertini@yahoo.com,[3]astiany@gmail.com,

Abstrak

Paper ini membahas tentang waktu yang diperlukan untuk menunda investasi menggunakan model *Fuzzy Real Option* dengan pendekatan model *Black Scholes*, dimana presen *value* dari ekspektasi *cash flows* dan biaya ekspektasi diestimasi dengan bilangan segitiga *fuzzy* dan terakhir diberikan ilustrasi perhitungan numerik pada investasi saham.

Kata Kunci : Investasi *, Real Option*, himpunan *fuzzy*.
AMS 2000 subject clasification: 91B28, 83C57, 54A50,03E72, 03H10

ON OPTIMAL INVESMENT TIMING WITH FUZZY REAL OPTIONS *)

In this paper we consider how long will take to delay investment in order to obtain optimum benefit by using Fuzzy Real Option model approaches the Black Scholes model, where the present values of expected cash flows and expected costs are estimated by triangular fuzzy numbers and finally, we give illustrative examples and their numerical solutions to stock investing.

Key words: *Investment, Black Scholes, Real option, fuzzy set theory*
AMS 2000 subject clasification: 91B28, 83C57, 54A50,03E72, 03H10

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan matematika pada saat ini sangat pesat. Hal ini terjadi seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Perkembangan ilmu dan teknologi pada dasarnya tidak terlepas dari konsep matematika, karena matematika adalah suatu alat yang dapat menyelesaikan masalah secara sistematik melalui model. Model matematika merupakan salah satu cara yang digunakan untuk menganalisis suatu fenomena nyata salah satunya adalah dalam bidang investasi.

Investasi adalah suatu kegiatan yang dilakukan oleh pemilik modal untuk membelanjakan sejumlah dana yang tidak habis dikonsumsi. Dana tersebut dapat digunakan untuk membeli barang-barang modal atau diinvestasikan pada wahana tertentu dengan harapan akan mendapat hasil yang memadai (Umar, 2007). Investasi mempunyai nilai waktu karena investasi yang diputuskan akan memberikan hasil pada waktu yang akan datang dalam kurun waktu yang cukup panjang. Selain itu, investasi mengandung risiko, artinya dalam proses investasi terdapat kemungkinan terjadinya kegagalan atau penyimpangan antara hasil yang diharapkan dengan hasil sesungguhnya. Karena investasi mempunyai nilai waktu dan risiko maka optimalisasi waktu investasi menjadi semakin sulit dan kompleks untuk diprediksi, akibatnya investor akan menghadapi ketidakpastian yang tinggi.

Salah satu jenis investasi yang banyak diminati saat ini adalah saham. Hal ini dapat terjadi karena saham memiliki tingkat pendapatan yang lebih besar daripada tingkat pendapatan yang dihasilkan deposito atau investasi lainnya. Namun mengingat saham merupakan jenis investasi berisiko tinggi maka sebelum berinvestasi, investor perlu memikirkan berbagai pertimbangan dan analisis yang matang agar dapat meminimalkan risiko. Terdapat beberapa penelitian yang mengkaji tentang optimisasi waktu investasi salah satunya yang telah dilakukan oleh Christer Carlsson dan Robert Fuller, 2001.

Sistematika paper disusun sebagai berikut: sesi 2 model *Real Option*, sesi 3 himpunan dan bilangan *fuzzy*, sesi 4 model *Fuzzy Real* Option, sesi 5 perhitungan numerik dan diakhiri dengan kesimpulan.

2. Konsep Dasar dan Teori *Real Option*

Dalam perdagangan saham dikenal istilah *option. Option* adalah suatu hak yang dimiliki pemegangnya, bukan kewajiban yang harus dilaksanakan pada waktu kontrak tersebut jatuh tempo.

Salah satu jenis *option* antara lain *call option*. *Call option* adalah hak untuk membeli saham yang diperoleh dengan cara pihak pemegang call terlebih dahulu membeli *call option* dengan kesepakatan harga call, jangka waktu dan harga waktu jatuh tempo (*exercise price*) (Hakiman, 2005).
Secara umum model *option* dapat didekati dengan model *Black Scholes*. Pada tahun 1973 Merton memperluas model *option* pendekatan *Black Scholes* dengan cara memasukkan variabel dividen. Persamaannya adalah (Hakiman, 2005):

$$C_0 = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - X e^{rt} N(d_2), \qquad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad (2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \qquad (3)$$

dimana

C_0 = nilai *call option.*
X = nilai *exercise.*
S_0 = harga saham sekarang $t = 0$
T = periode *option*.
r = suku bunga bebas risiko.
σ = volatiliti.

$N(d)$ = fungsi kumulatif distribusi normal.

δ = dividen.

Analisis penetapan nilai *option* digunakan untuk keperluan di sektor rill. *Option* (*Real Option*). Model yang digunakan adalah Persamaan (1), tetapi terdapat pendekatan secara riil dalam beberapa variabelnya, antara lain nilai *Real Option* dan harga saham dirubah menjadi nilai *present value* ekspektasi *cash flow* ((V_t)). *Real Option* dapat digunakan untuk mengatasi masalah dalam menentukan berapa lama waktu yang dibutuhkan dalam menunda investasi agar diperoleh manfaat yang optimal. Dengan periode waktu maksimum , investasi dapat dilakukan pada saat dimana opsi $C_{t^*}, 0 \leq t^* \leq T$ bernilai positif dan maksimum, dengan persamaan berikut: (Carlsson dan Fuller, 2001)

$$C_{t^*} = maks_{t=0,1,\cdots,T} C_t = \tilde{V}_t e^{-\delta t} N(d_1) - \tilde{X} e^{-rt} N(d_2), \qquad (4)$$

dimana

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= PV\left(\widetilde{cf}_0, \dots, \widetilde{cf}_T, \beta_P\right) - PV\left(\widetilde{cf}_0, \dots, \widetilde{cf}_{t^*}, \beta_P\right) \\ &= PV\left(\widetilde{cf}_{t^*+1}, \dots, \widetilde{cf}_T, \beta_P\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

3. Himpunan dan Bilangan *Fuzzy*

Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan normal, konveks, dan kontinu. *Family* dari himpunan *fuzzy* dinotasikan sebagai $\mathcal{F}$.

Definisi 3.1 *Misalkan* X *adalah himpunan semesta. Maka himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *dari* X *didefinisikan dengan fungsi keanggotaan (membership function)*

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1], \qquad (6)$$

dimana setiap elemen $x \in X$ *bilangan real,* $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *berada pada interval* [0,1], *dan nilai* $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *menunjukan tingkat keanggotaan (membership) dari* x *pada* $\tilde{A}$ (Baoding, 1999).

Adapun himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ didefinisikan (Sudrajat, 2007a, 2007b):

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}. \qquad (7)$$

Sedangkan himpunan level γ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ di X yang dinotasikan $[\tilde{A}]^{\gamma}$, didefinisikan (Collan, *et al*, dan Sudrajat, 2007b):

$$[\tilde{A}]^{\gamma} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \gamma\}, \qquad (8)$$

Persamaan (8) dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut (Carlsson dan Fuller, 2001):

$$[\tilde{A}]^{\gamma} = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)]. \qquad (9)$$

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dari X dikatakan konveks jika $[\tilde{A}]^{\gamma}$ subset konveks dari X untuk setiap $\gamma \in [0,1]$.

Definisi 3. 2 *Misalkan* $\tilde{A}$ adalah bilangan *fuzzy dan* $[\tilde{A}]^{\gamma}$ *adalah subset convex dari* $\mathbb{R}$ *untuk setiap* $\gamma \in [0,1]$. *Maka terdapat:*

$$a_1(\gamma) = \min[\tilde{A}]^{\gamma} \qquad (10)$$

$$a_1(\gamma) = \min[\tilde{A}]^{\gamma}, \qquad (11)$$

dimana $a_1(\gamma)$ *menunjukkan sisi sebelah kiri dan* $a_2(\gamma)$ *menunjukkan sisi sebelah kanan dari himpunan level* γ . (Collan, Fuller, dan Mezei, 2008: 4).

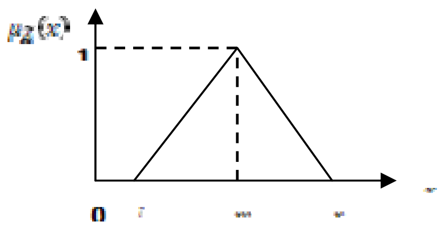
Definisi 3. 3 *Himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *disebut bilangan segitiga fuzzy dengan pusat di* m *, lebar* $m - l > 0$ *(sisi sebelah kiri), dan lebar* $r - m > 0$ *(sisi sebelah kanan), jika bentuk fungsi keanggotaannya adalah*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-l}{m-l}, & jika\ l \leq x < m \\ \dfrac{r-x}{r-m}, & jika\ m < x \leq r \\ 0, & jika\ x < l,\ x > r, \end{cases} \qquad (12)$$

dimana $\tilde{A} = (l, m, r)$. *Dari persamaan* (12)*, didapat persamaan sebagai berikut:*

$$[\tilde{A}] = [m - (1-\gamma)(m-l), m + (1-\gamma)(r-m)], \qquad (13)$$

dimana $A = (l, r)$ (Collan, Fuller, dan Mezei, 2008: 4).



Gambar 1. Grafik persamaaan bilangan segitiga *fuzzy*

Definisi 3. 4 *Persamaan ekpektasi dari bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *dengan* $[\tilde{A}]^{\gamma} = [a_{11}(\gamma), a_2(\gamma)]$ *adalah* (Collan, Fuller, dan Mezei, 2008)*:*

$$E(\tilde{A}) = \int_0^1 \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} 2\gamma \, d\gamma = \int_0^1 a_1(\gamma) + a_2(\gamma)\gamma \, d\gamma. \qquad 14)$$

Dari definisi di atas, maka didapat persamaan ekspektasi untuk bilangan segitiga *fuzzy*, yaitu (Carlsson dan Fuller, 2000: 4):

$$E(\tilde{A}) = m + \frac{(r-m)-(m-l)}{6}. \qquad (15)$$

4. *Fuzzy Real Option*

Fuzzy Real Option adalah model *Real Option* yang diolah dengan menggunakan aturan himpunan *fuzzy*. Dalam aturan pengolahan *fuzzy*, langkah pertama yang dilakukan adalah proses fuzzyfikasi. Berdasarkan pernyataan di atas, maka *present values* dari ekspektasi *cash flow* harus difuzifikasi terlebih dahulu ke dalam bentuk bilangan segitiga *fuzzy* sebagai berikut (Wang dan Lee, 2007: 5):

$$\tilde{V} = [V_l, V_m, V_r], \qquad (16)$$

dimana derajat kepercayaan *present value* yang paling mungkin dari ekspektasi *cash flow* dinotasikan dengan V_m, V_r adalah nilai yang terbesar , dan V_l adalah nilai terkecil dari present value ekspektasi *cash flow.*

Dengan cara yang sama dilakukan juga fuzifikasi terhadap ekspektasi *cost/ exercise* ke dalam bentuk bilangan segitiga *fuzzy* sebagai berikut (Wang dan Lee, 2007: 5):

$$\tilde{X} = [X_l, X_m, X_r], \qquad (17)$$

dimana derajat kepercayaan yang paling mungkin dari ekspektasi *cost/ exercise* dinotasikan dengan X_m, X_r adalah nilai yang terbesar , dan X_l adalah nilai terkecil dari ekspektasi *cost/ exercise.*

Setelah dilakukan fuzifikasi terhadap variabel *present values* ekspektasi *cash flow* dan ekspektasi *cost/ exercise*, maka dilakukan langkah kedua dalam penyelesaian *fuzzy* yaitu proses evaluasi *rule*. Evaluasi *rule* yang digunakan dalam paper ini adalah *Real Option* sehingga didapat formula baru yaitu *Fuzzy Real Option* dengan bentuk persamaan sebagai berikut (Carlsson dan Fuller, 2001):

$$\tilde{C}_t = \tilde{V}_t e^{-\delta T} N(d_1) - \tilde{X} e^{-rt} N(d_2), \tag{18}$$

dimana

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{19}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\ . \tag{20}$$

Berdasarkan karakteristik dari bilangan segitiga *fuzzy* dan prinsip yang dikemukakan oleh Zadeh pada tahun 1965, maka untuk dua bilangan segitiga *fuzzy* (*triangular fuzzy numbers*) $\tilde{A} = (l_1, m_1, r_1)$ dan $\tilde{B} = (l_2, m_2, r_2)$ berlaku sifat-sifat sebagai berikut (Wang dan Lee, 2007: 4):

1. Penjumlahan dua bilangan *fuzzy* $\oplus$

$$(l_1, m_1, r_1) \oplus (l_2, m_2, r_2) = (l_1 + l_2, m_1 + m_2, r_1 + r_2) \tag{21}$$

2. Perkalian bilangan real k dengan bilangan *fuzzy* $\otimes$

$$k \otimes (l_1, m_1, r_1) = (kl_1, km_1, kr_1). \tag{22}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat bilangan segitiga *fuzzy* didapat persamaan sebagai berikut (Carlsson dan Fuller, 2001):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= (V_l, V_m, V_r) e^{-\delta T} N(d_1) - (X_l, X_m, {}_r\,) e^{-rt} N(d_2) \\ &= (V_l e^{-\delta T} N(d_1) - X_l e^{-rt} N(d_2), V_m e^{-\delta T} N(d_1) + \\ &\quad - X_m e^{-rt} N(d_2), V_r e^{-\delta T} N(d_1) - X_r e^{-rt} N(d_2)). \end{aligned} \tag{23}$$

Dengan demikian, secara umum didapat suatu cara pengambilan keputusan investasi dalam bentuk bilangan *fuzzy*. Sehingga dengan periode waktu maksimum T, investasi dapat dilakukan pada saat t^* dimana $0 \le t^* \le T$ dengan opsi C_t^* yang bernilai positif dan maksimum sebagai berikut (Carlsson, dan Fuller, 2001):

$$C_t^* = \max_{t=0,1,\cdots,T} C_t = \tilde{V}_t e^{\delta t} N(d_1) - \tilde{X} e^{rt} N(d_2), \tag{24}$$

dimana

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= PV(\tilde{cf}_0, \ldots, \tilde{cf}_T, \beta_p) - PV(\tilde{cf}_0, \ldots, \tilde{cf}_t, \beta_p) \\ &= PV(\tilde{cf}_{t+1}, \ldots, \tilde{cf}_T, \beta_p). \end{aligned} \tag{25}$$

$\tilde{cf}_j$ dinotasikan sebagai ekspektasi (*fuzzy*) *cash flow* pada saat waktu j dan β_p adalah suku bunga bebas risiko.

Pada perhitungannya, karena anggota himpunannya masih dalam bentuk bilangan segitiga *fuzzy* maka untuk mencari nilai maksimal dari himpunan $\{\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \cdots, \tilde{C}_T\}$ ini tidak mudah. Oleh karena itu, untuk mengatasi hal tersebut diperlukan suatu proses penyelesaian yang juga merupakan langkah terakhir dari proses penyelesaian *fuzzy,* yaitu proses defuzzyfikasi. Dalam proses defuzzyfikasi ini, perlu dihitung nilai ekspektasi *Fuzzy Real option* $\tilde{C}_t = \{\tilde{C}_l, \tilde{C}_m, \tilde{C}_r\}$ dalam bentuk segitiga dengan menggunakan persamaan (15) (Carlsson dan Fuller, 2001: 4):

$$E(\tilde{C}_t) = C_m + \frac{(C_r - C_m) - (C_m - C_l)}{6}, \qquad (26)$$

dimana C_r, C_m, dan C_l adalah nilai terbesar, menengah, dan terkecil dari setiap anggota bilangan dalam himpunan *Fuzzy Real Option.* Setelah dilakukan proses defuzzyfikasi, maka keluaran yang dihasilkan kembali menjadi bentuk himpunan *crisp*, sehingga persamaan (24) dapat digunakan untuk mendapatkan solusi.

5. Perhitungan Numerik

Pada sesi ini dibahas mengenai perhitungan dari model *Fuzzy Real Option.* Berdasarkan persamaan (1) data yang digunakan adalah data saham penutupan harian 22 Mei 2006 sampai dengan 21 agustus 2009 yang diambil dari situs http://finance.yahoo.com/lookup?s=bmri. Selain itu, dibutuhkan data penunjang yang diambil dari Catatan Atas Laporan Keuangan Konsolidasian PT bank mandiri (Persero) Tbk, RUPS tahunan tanggal 22 Mei 2006 MSOP Tahap 3, yaitu suku bunga bebas risiko 11,65%, ekspektasi periode opsi 782 hari, ekspektasi faktor ketidakstabilan harga saham sebesar 50%, ekspektasi dividen yang dihasilkan adalah 7,75%, dan nilai *exercise* per lembar saham adalah Rp. 1.495,08 (nilai penuh) selama periode opsi.

Karena data saham yang digunakan adalah data saham harian, maka untuk mempermudah perhitungan *call option* pada persamaan (18), variabel-variabel dengan satuan persen pertahun, yaitu suku bunga bebas risiko dan ekspektasi dividen dirubah ke dalam satuan persen perhari (asumsikan satu tahun terdiri dari 365 hari). Hasilnya, suku bunga bebas risiko menjadi bernilai 0,0319% dan ekspektasi dividen menjadi bernilai 0,212%.

Setelah melakukan perhitungan *call option* dengan model *Fuzzy Real Option* berdasarkan persamaan (18) didapat C_{t^*} = 1652, 488 dengan t^* = 768. Ini berarti bahwa dengan periode/ batas waktu jatuh tempo T = 782 hari maka sebaiknya pengambilan keputusan investasi ditunda sampai pada saat t^* = 768 (tepatnya pada tanggal 3 Agustus 2009) dimana opsinya diperkirakan akan bernilai Rp. 1652,488;-.

4. Kesimpulan

1. Model *Fuzzy Real Option* adalah model *Real Option* yang diolah dengan menggunakan aturan himpunan *fuzzy*. Model *Fuzzy Real Option* dapat digunakan antara lain untuk menghitung nilai *call option.* Namun berbeda dengan nilai *call option* biasa, dengan model *Fuzzy Real Option* nilai *call option* yang dihasilkan masih berbentuk bilangan *fuzzy.* Oleh karena itu, diperlukan perhitungan nilai ekspektasi agar nilai *call option* menjadi bilangan biasa (*crisp*).
2. Waktu optimal yang dibutuhkan untuk menunda investasi dengan menggunakan metode *Fuzzy Real Option* dapat dilakukan dengan cara mencari nilai maksimum dari semua nilai *call option* yang telah dihitung selama periode tertentu, karena jika nilai keuntungan dihitung dari setiap nilai *call option* maka keuntungan maksimum terdapat disaat nilai *call option* tersebut maksimum pula.

3. Dengan menggunakan metode *Fuzzy Real Option* nilai *call option* yang dihasilkan lebih mulus jika dibandingkan dengan menggunakan *Real Option* biasa, karena metode *Fuzzy Real Option* mengubah nilai saham dan nilai *exercise* ke dalam bentuk bilangan *fuzzy* yang bersifat kontinu.

5. Daftar Pustaka

[1] Baoding Liu. 1999. *Uncertain Programming*. John Wiley & Sons, Inc.

[2] Carlsson, C., dan Fuller, R. 2001. *On optimal investment timing with fuzzy real option*. Finland.

[3] Collan, M., Fuller, R., dan Mezei, F. 2008. *A fuzzy pay-off method for real option valuation*, Finland.

[4] Hakiman. 2005. *Model Penentuan Harga Ipo di Bursa Efek Jakarta dengan Menggunakan Metode Real Option*, Disertasi, Fakultas Ekonomi, Bandung : Universitas Padjadjaran.

[5] Sudrajat, 2007a. *Mathematical ProgramingModels for Portfolio Selection, Editura Universităţ ic, Bucureşti Romania*.

[6] Sudrajat, 2007b. *The Weighted Possibilistic Mean Variance and Covarian of Fuzzy Numbers, Journal of Applied Quantitative Methods*, *Vol 2, No 3 Fall.*

[7] Umar, R. 2007. *Strategi Investasi Saham Portopolio Melalui Bursa Efek Jakarta*. Jakarta.

[8] Wang, S., dan Lee C. 2007. *A fuzzy real option valuation approach to capital budgeting under uncertainty*. PBFEAM 2007, Ho Chi Minh City, Vietnam.