D10A.00400304

PENDAHULUAN

PENELITIAN OPERASIONAL

MODUL I

SUDRADJAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN
2008

KATAPENGANTAR

Modul mata kuliah Pendahuluan Penelitian Operasional ini di susun dalam dua modul. Modul ini merupakan revisi dari modul penelitian operasional yang disusun pada tahun 2000, dan sekaligus juga sebagai pelengkap buku text kuliah. Mengingat materi mata kulian Pendahuluan Penelitian Operasional ini cukup banyak maka modul ini diharapkan dapat memjadi penuntun bagi mahasiswa. Modul I ini disusun dalam 6 bab, yaitu

Pada bagian awal, membahas tentang sejarah berdirinya penelitian operasional, Definisi Penelitian Operacional, ciri-ciri penelitian operasioanal, penelitian operasional dan penanggulangan masalah dan modell-model kuantitatif.

Bagian ke dua, membahas dasar-dasar aljabar linier: vektor, matriks, determinan, rank matriks , inverse matriks dan himpunan konveks.

Bagian ke-tiga, membahas permasalahan pemograman linier, mmodel dasar pemograman linier, memformulasikan model pemograman linier.

Bagian ke-empat, membahas tentang metode-metode penyelesaian model pemograman linier dan bagian akhir membahas masalah dual primal.

Mudah-mudahan modul ini dapat memberikan arahan dalam mempelajari penelitian operasional khususnya bagi para mahasiswa dan diharapkan setelah mendapat masukan-masukan dan peyempurnaan modul ini bisa diterbitan dalam bentuk buku.

Bandung, Agustus 2008
Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Sejarah berdirinya penelitian operasional

Belum ada ilmu pengetahuan yang lahir pada sutu hari tertentu. Demikian juga Penelitian Operasional (PO) tidak terkecuali. Umurnya adalah setua ilmu pengetahuan dan manajemen itu sendiri. Oleh karena itu sangat sukar menandai awal resmi dari penelitian operational.

Banyak perintis yang sudah melaksanakan tugas apa yang kita namakan sekarang ini sebagai penelitian operational. Misalnya sekitar tahun 1914 F.W. Lanchester di Inggris, telah menerbitkan buku tentang hubungan teoritis antara kemenangan dan keunggulan tenaga kerja dan tenaga uap. Awal perang dunia pertama di Amerika Serikat, Thomas Edison telah menemukan manuver kapal-kapal dagang yang dapat menghindari kerugian akibat kapal selam musuh hingga sekecil mungkin. Dia menggunakan permainan taktik atau tactical game boar dalam menjawab persoalan tersebut. Juga sekitar tahun 1910-an A.K. Erlang seorang sarjana teknik dari Kopenhagen melakukan percobaan fluktuasi kebutuhan alat-alat dial otomatis untuk fasilitas telepon.

Akhirnya penemuan itu menjadi dasar dari teori antrian, masih banyak nama-nama yang dianggap sebagai perintis dari pertumbuhan Penelitian Operasional seperti Sir Robert Watson Watt di Amerika Serikat.

Nama Penelitian Operasional sebenarnya muncul pada tahun 1940 yaitu sekitar perang dunia II di Inggris, pada waktu sarjana fisika P.M.S. Blackett meminpin satu tim yang disebut Anti-Aircraff Command Resserch Group. Tim ini mempelajari hasil kerja alat pengawasan senjata di lapangan , terutama digunakan oleh serdadu melawan musuh.

Tim ini kemudian berkembang menjadi tim antardisiplin bidang ilmu yaitu yang terdiri dari serjana Matematika, Fisika, Fisikologi, Astrofisika, Fisika Matematika dan Perwira Militer. Kemudian tim ini dikenal dengan nama Tim 11 (*Blackett`s Circus*). Kegiatan mereka ialah melakukan studi dan penelitian terhadap penggunaan radar secra operasional. Kerena penggunaan ilmu separti inilah maka kita mengenalnya sebagai Penelitian Operasional atau di inggris disebut ***Operations Reseacrh.***

Tahun 1942, Penelitian Operasional diperkenalkan dan diimplementasikan di Amerika Serikat. Persoalan pertama yang ditangani ialah masalah radar dan pengembangan suatu rencana tentang iring-iringan kapal dagang untuk menghindari kerugian besar akibat kapal selam musuh.

Tim pada angkatan udara dusebut dengan nama *Operations Analysis* dan pada angkatan darat dan Laut dikenal dengan nama *Operations Reseach and Operations Evaluations*. Kegiatan ini berkembang tidak saja di inggris dan Amerika Serikat tetapi akhirnya meluap ke Kanada dan Perancis.

Selasainya perang Dunia II. Pembangunan kembali sektor industri memerlukan pendekatan-pendekatan baru. Tantangan ini di jawab oleh orang-orang Penelitian Operasional yang sudah beralih tugas di lembaga pemerintahan, sehingga banyak pekerja Penelitian Operasional bertindak sebagai konsultan di perusahaan-perusahaan Industri.

Untuk beberapa tahun sesudah perang, hanya terdapat sedikit saja orang-orang Penelitian Operasional yang bekerja di lapangan. Baru pertama tahun 1950-an jumlahnya agak meningkat hingga grup Penelitian Operasional mampu menutupi kebutuhan yang makin meningkat.

1.2 Definisi Penelitian Operasional

Definisi 1.1 (Morse dan Kimball)

Sebagai suatu metode ilmiah yang memungkinkan para manajer mengambil keputusan mengenai kegiatan yang mereka tangani dengan dasar kuantitatif

Definisi 1.2 (Churman, Arkoff dan Arnoff)

Sebagai aplikasi metode-metode, teknik-teknik, dan peralatan-peralatan ilmiah dalam menghadapi masalah-masalah yang timbul di dalam perusahaan dengan tujuan ditemukannya pemecahan yang optimum

Definisi 1.3 (Miller dan M.K. Starr)

Merupakan peralatan manajemen yang menyertkan ilmu pengetahuan, matematika dan logika dalam kerangka pemecahan masalah-masalah yang dihadapi sehari-hari sehingga akhirnya permasalahan-permasalahan tersebut padat dipecahkan secara optimal

- Tumpuan Utama penelitian operasional adalah MODEL
- Titik dasar Modeling adalah Approksimasi atau abstraksi dari realitas dengan hanya memusatkan perhatian pada beberapa bagian atau sifat-sifat dari kehidupan nyata.

1.3 Ciri-ciri penelitian operasioanal

Dari pertumbuhan dan perkembangan Penelitian operasional selama bertahun-tahun, ciri-ciri utama yng kita lihat dari penelitian operational ini ialah :

1) Menguji hubungan fungsional dan suatu sistem secara keseluruhan.
2) Menggunakan pendekatan tim campuran atau interdisiplin.
3) Menganut metode ilmiah.
4) Membuka persoalan-persoalan baru untuk dipelajari.

1.4 Menguji Hubungan Fungsional Suatu Sistem dan pendekatan tim

Secara terperinci. Sebelum terjadi revolusi industri, kebanyakan usaha dagang dan industri terdiri dari perusahan kecil yang masing-masing dipimpin oleh satu orang yang melakukan pembelian, perencanaan produksi, menjual hasilnya, mengangkat serta memecat karyawan dan lain-lain.

Mekanisasi produksi membawa perkembangan yang lebih pesat pada perusahaan industri sehingga tidak mungkin lagi bagi seorang untuk melakukan fungsi manajerial seperti itu. Karena itu terjadilah pembagian fungsi manajerial seperti manajer produksi, pemasaran, keuangan, personalia, dan lain-lain.

Mekanisasi yang terus berlangsung dan ditambah dengan otomatisasi produksi (komputerisasi) menghasilkan pertumbuhan industri jauh lebih pesat, yang akhirnya menampilkan desentralisasi operasi dan pembagian fungsi manajerial. Dalam suatu organisasi tiap satuan fungsional mempunyai tugas khusus sebagai bagian dari keseluruhan tugas.

Penelitian Operasional sedapat mungkin mencoba menemukan keputusan terbaik bagi organisasi secara keseluruhan. Tujuan penting dari Penelitian Operasional disini adalah pemecahan secara menyeluruh dari organisasi (pendekatan sistem).

Seperti telah dijelaskan bahwa penelitian Operasional lahir dari ilmu pengtahuan lain sebagaimana sering terjadi pada disiplin ilmiah lainnya. Sehingga sulit membedakan yang mana bidang yang baru dan mana yang lama karena sering terjadi tumpng tindih antar persoalan,cara dan konsep.

Tumpang tindih antara Penelitian Operasional dan bidang lainnya terjadi terutma dalam hal cara di mana Penelitian Operasional mulai dan berlangsung. Penelitian Operasional adalah suatu penelitian yang dilakukan oleh suatu tim ilmuwan yang bebeda-beda. Adakalanya terdiri dari matematikawan, fisikawan, fisikolog, dan ekonom berkumpul dan bekerja bersama-sama untuk memecahkan suatu persoalan.

Efektivias kerja tim seperti dalam menangani suatu persoalan dalam Peneltian Operasional bukanlah suatu hal yang kebetulan. Kalau seorang ilmuwan di hadapkan pada suatu persoalan baru, dia juga seperti orang lain mencoba membuat abstraksi dan melihat apakah dia sudah pernah berhadapan persoalan serupa dalam konteks yang lain terutama dalam bidangnya sendiri. Begitu dia sudah menemukan analoginya sendiri maka dia akan mencoba cara atau metode yang pernah dia gunakan. Kalau semua ilmuwan dari disiplin yang berbeda melakukan hal yang sama secara kolektif maka munculah pendekatan menyeluruh terhadap persoalan yang dihadapi. Pendektan mana yang paling sesuai tentu tegantung pada keadaan. Tim akan menguji pilihan yang ada dan memilih pendekatan atau pengembanagan sesuatu yang baru yang diambil dari berbagai metode penanggulangan.

Karena itu, satu alasan utama bagi tim Penelitian Operasional ialah membuat satu prosedur ilmiah yang maju guna mengatasi satu persoalan ataupun mengembangkan sutu prosedur

baru yang lebih efektif dibanding dengan prosedur yang ada. Ide ini bukan hasil pikiran seorang yang berlaku tetapi adalah hasil pikiran tim secara bersama-sama.

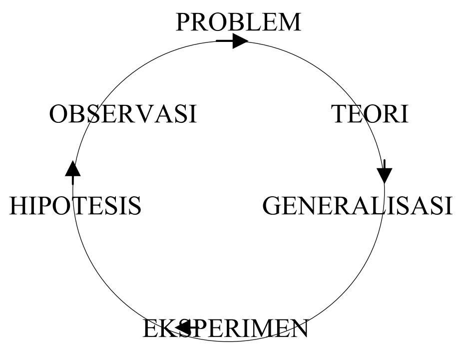
Keuntungan dari pendekata tim terletak pada fakta bahwa banyak sistem mengandung asfek-asfek fisik, biologi, pisikologi, sosiologi, ekonomi, dan teknik bersama-sama. Dan hanya orang yang benar-benar terlatih dalam bidang masing-masing yang mampu mngerti dan menganalsis sistem seperti ini. Kekurang awasan tentang satu atau dua aspek memberi gambaran yang kurang lengkap tntang sistemnya. Kaena itu, melihat satu sistem tidak cukup dengan melihat satu unsur dan antar hubungannya tetapi juga harus melihat semua aspek oprasinya. Dengan adanya tim campurn dapat menambah jumlah aspek oprasi yang tentu dapat diuji.

1.5 Menganut Metode Ilmiah

Metode yang biasa digunakan Penelitian Operasional untuk menghadapi suatu pesoalan tipe-eksekutif ialah mengamati apa yang biasanya muncul pada tipe-tipe eksekutif tertentu dan kemudian menganalisis asal-usul pemecahan, seperti terlihat pada Gambar 1,1. Kerena itu, usaha yang dilakukan ialah mencoba menemukan struktur sekutu atau kebersamaan diantara persoalan dan landasan terhadap struktur yang dimaksud dapat di uji. Usaha ini adalah berupa penggunaan ilmu pengetahuan dalam mempelajari tipe-eksekutif dan berlangsung dari waktu ke waktu.

Salah satu tujuan Penelitian Operasional adalah memberikan suatu landasan ilmiah untuk menyelesaikan persolan yang mencangkup interaksi dari unsur-unsur guna kepentingan yang terbaik bagi organisasi secara keseluruhan. Penerapan ilmu pengetahuan terhadap suatu sistem kadang-kadang disebut sebagai anlisis sistem dan ini sering disamakan dengan Penelitian Operaional. Tetapi analisis sistem lebih berorientasi terhadap organisasi yang menyangkut kemanusiaan.

Dalam Penelitian Operasional selanjutnya dapat kita lihat bahwa munculnya beberapa persolaan makin lama makin sering terjadi. Kerena itu, umumnya, cara, teknik dan alat yang dikembangkan untuk menangani pesoalan mengikuti pertumbuhan persolan tersebut, sehingga para peneliti oprasional harus lebih memahami cara, teknik dan alat tersebut.



Gambar 1.2 Siklus metode ilmiah

1.6 Persoalan baru

Kebanyakan proyek Penelitian Operasional mulai dengan persolan-persoalan yang biasa dan dalam ruanglingkup yang terbatas. Tetapi penelitian terus berkembang sejauh syarat-syarat lingkungan masih mengiinkan. Akibatnya, ruang ligkup penelitian mempunyai satu skala terhadap mana Penlitian Operasional sering mulai dengan persoalan yang sama meskipun jarang berakhir pada persoalan yang sama pula.

Adalah menjadi ciri dari Penelitian Operasional bahwa dalam menyelasaikan setiap persolan terungkap pula persoalan-persoalan baru. Akibatnya, Penelitian Operasional tidaklah efektif kerjanya apabila hanya dibatasi untuk sekali jadi. Keuntungan yang lebih besar akan dapat diraih apabila dapat dilakukan penelitian yang terus menerus.

Dalam banyak hal, persoalan menyeluruh tidak mugkin dirumuskan terleih dahulu, tipe penyelesaain dari satu fase akan membntu menemukan jawab dari fase berikutnya.

1.7 Penelitian operasional dan penanggulangan masalah

Dalam menanggulangi masalah, Penelitian Operasinal menggunkan metoda kuantitatif.Kapan dan dimana mulai Penelitian Operasional adalah sebarang artinya tidak tentu.

Akan tetapi dalam pelaksanaannya Penelitian Operasional terdapat 6 (enam) langkah dalam rangka penanggulangan masah yaitu : Siagian 1987.

1. Merumuskan masalah.

2. Mengembangkan alternatif penyelesaian.
3 Membentuk model sebagai bentuk formal dari alternatif..
4. Membentuk model dan alternatif penyelesaian.
5. Membuat kontrol terhadap penyelesaiaan.
6. Implementasi dari jawab yang dipilih.

Merumuskan Masalah

Umumnya dalam merumuskan masalah diperlukan masa orientasi dan pengamatan. Pendekatan tradisional yang digunakan dalam metode ilmiah dimulai dari pengamatan terhadap fenomena, yakni, mengamati fakta, pendapat, dan gejala yang berkenaan dengan masalah. Pengamatan dapat berupa tinjauan singkat atau berupa pengamatan terperinci, lama dan lebih terperinci tergantung pada persoalan yang diamati. Jelasnya pengamatan digunakan untuk menemukan permasalahan. Umumnya seorang menejar yang baik harus tanggap dan peka terhadap adanya masalah. Dia harus yakin akan telah menemukan masalah sesungguhya dan bukan gejalanya. Pengetahuan tentang fakta dan gejala yang bersumber dari pertanyaan tentang apa, dimana, kapan, siapa, dan bagaimana yang berkenaan dengan manajemen, orang, alat, mesin dan dana membawa kita pada pemahaman tentang sebab-sebab di belakang fakta setelah menjawab pertanyaan "kenapa".

Jadi, akhirnya interaksi yang efektif antara pengetahuan tentang fakta dengan pemahaman tentang sebab-akibat membantu kita untuk merumuskan masalah sesungguhnya. Penelitian Operasional menentukan faktor - faktor yang mengubah masalah, khususnya, variabel,
kendala, dan asumsi. Faktor variabel adalah sesuatu untuk mana harus diambil keputusan. Kendala membatasi jawab terhadap persoalan. Sedangkan asumsi yang perlu untuk jawab terhadap persoalan sesunguhya harus diselasaikan terlebih dahulu.

Dapat disimpulkan bahwa dalam merumuskan masalah harus dilakukan analisis yang cermat dari sistem, dari tujuan dan dari tindakan manajernya. Di samping itu, harus diamati faktor-faktor yang dapat mempengaruhi keputusan dan tujuan serta tindakan harus diungkapkan.

Mengembangkan Alternatif Penyelesaian

Langkah penting yang kedua dalam pendekatan penyelesaiaan permasalahan ialah mengembangkan alternatif tindakan atau alternatif penyelesaian terhadap permasalahan sesungguhnya. Dengan perkataan lain, langkah ini dapat dinyatakan sebagai formulasi atau perumusan dari beberapa hipotesis. Langkah ini tidak lain dari pada analisis data, yang berkenaan dengan penentuan asumsi-asumsi, kendala-kendala, kejadian-kejadian, hubungan-hubungan,variabel-variabel serta faktor yang dibutuhkan dalm pembentukan model, terutama pembentukn model matemtika. Pada hakeketnya data ini merupakan sintesa dari langkah pertama yang sesungguhnya memberi kemungkinan untuk mengajukan beberapa kemungkinan pilihan untuk penyelesaiaan permasalahan yang dihadapi.

Pembentukan Model sebgai Bentuk Formal dari Alternatif

Sesudah dilakukan pilihan usul-usul terhadap alternatif, tindakan atau langkah berikutnya adalah membangun suatu model dengan gambaran formal dari pilihan suatu model tersebut. Dalam studi Penelitian Operasional, kebanyakan tindakan penyelesaiaan adalah berbentuk model matematika. Model matematika dapat dikembangkan dengan alat yang sesuai atau biasaanuya dapat menampung persoalan-persoalan dari keadaan yang sesungguhnya.

Dalam hal ini, model Penelitian Operasional berstruktur sesuai dengan parameter-parameter yang sudah ditentukan terlebih dahulu. Sedapat mungkin informasi yang berkaitan dengan tingkah laku model tetap dapat diketahui. Analisis demikian ini, umumya disebut sebagai analisis kepekaan dan khususnya bila parameter berupa harga-harga sebenarnya, taksiran atau keduanya, biasanya model akan selalu dinyatakan dalam bentuk hubungan matematika seperti persamaan dan fungsi. Perlu dipehatikan bahwa beberapa model hanya dapat dikembangkan bila dari pendekatan awal telah mmperlihatkan adanya harapan memperoleh penyelesaiaan akhir. Selagi model sedang dikembangkan akan terlihat dengan jelas adanya penyimpangan-penyimpangan yaitu dimana tingkah laku model tidak sesuai dengan permasalahan. Kerena itu, beberapa model yang kelihatannya gagal memberi harapan akan dihapus. Akibatnya, calon makin lama makin sedikit akhirnya tinggal satu dua sebagai pilihan.

Menguji Model dan Alternatif Penyelesaian

Begitu jumlah alternatif model sudah berkurang perlu diuji untuk memilih satu yang optimum. Apabila model yang tinggal telah cocok dengan Penelitian Operasional maka jawabanya dapat ditentukan.

Terdapat dua prosedur yang penting yang dapat digunakan untuk menentukan jawab optimum dari suatu model. yaitu : 1) cara anlitik 2) cara numerik. Secara singkat dapat dijelaskan bahwa cara analitik terdiri dari dedukasi matematik seperti aljabar dan kalkulus Sedangkan cara numerik terutama menggunakan komputer berkenaan dengan mencoba menggunakan berbagai harga untuk variabel kontrol dari model, membandingkan hasil-hasil yang diperoleh dan memilih variabel kontrol yang menghasilkan jawaban optimum. Prosedur ini berubah dari percobaan sederhana ke proses iterasi yang lebih kompleks. Jawaban optimum baik yang diperoleh melalui cara analitik maupun numerik perlu diperhatiakn apakah sudah sesuai dengan tujuan seperti yang telah ditentukan terlebih dahulu.

Membuat Kontrol Terhadap Penyelesaiaan

Suaatu penyelesaian tetap sebagai suatu penyelesaian hanya apabila variabel yang tak terkendali dapat mempertahankan harga dan hubungn diantara variabel tersebut tidak berubah. Sebaliknya, penyelesaiaan tersebut tidak ada artinya kalau harga dari satu atu lebih variabel tak terkendali dan /atau satu atau lebih dari hubungan antara variabel berubah dengan cukup berarti.

Dalam membuat suatu kontrol tehadap penyelesaiaan, kita harus mengembangkan alat yang diperlukan untuk menetapkan kapan terjadi suatu perubahan yang berarti dan aturan-aturan harus dibuat guna menyesuaikan jawab terhadap adanya perubahan. Untuk itu, perlu ada suatu sistem informasi yang selalu memberikan umpan balik yang sangat diperlukan dalam penyelasaian.

Monitoring yang terus menerus melalui umpan balik tersebut, memberikan keterangan-keterangan prihal perubahan-perubahan yang terjadi.

Implementasi dari Jawab yang Dipilih

Jawab yang sudah diuji harus diterjemahkan kepada sejumlah prosedur oprasi yang dapat dimengerti dan dilaksanakan oleh orang-orang yang bertangung jawab terhadap pelaksanaan teresebut. Perubahan-perubahan di dalam prosedur dan sumber harus diuraikan dan dilaksanakan.

Dalam banyak objek rumusan masalah tidak akan selesai sampai proyek tersebut selesai secara sempurna, biasanya, terjadi saling tukar diantara langkah tersebut secara terus menerus selama berlangsungnya penelitian.

1.8 Model-model kuantitatif

Model Penelitian Operasional yang dikembangkan dan digunakan dalam berbagai persoalan, diantaranya : Liberman [4]

1. Pemrorgaman Linier
2. Persoalan Angktan

Mathematical programming

3. Teori Jaringan kerja
4. Pemrograman Dinamik
5. Strategi darn Teori Permainan
6. Pemrograman Bilangan Cacah (bulat)
7. Pemograman non-linier

Probabilistik model

8. Proses stokastik
9. Teori antrian
10. Teori persediaan
11. Teori peramalan
12. Proses keputusan Markov
13. Reliabiliti/teori penggantian
14. Teori keputusan
15. Simulasi

Pemrograman Linier

Pemrograman linier adalah membahas tentang pengalokasian sumber daya yang terbatas agar diperoleh hasil yang optimal (keputusan terbaik). Pemograman linier memuat metode grafik, simpleks dan dualitas yang digunakan pada proses alokasi. Program ini akan menjawab persoalan bila:

1. Terdapat sejumlah kegiatan untuk dilaksanakan dan terdapat alternatif cara untuk melaksanakannya.
2. Sumber dan fasilitas tidak tersedia untuk melaksanakan tiap kegiatan dalam cara yang paling efektif.

Persoalannya ialah, menggabungkan kegiatan dan sumber sedemikian rupa hingga terdapat efektivitas keseluruhan secara maksimal.

Persoalan Angkutan

Persoalan ini merupakan bagian khusus dari proses alokasi. Model ini membahas tentang distribusi aran oran atau jasa. Metode penyelesaian dilakukan dengan dua tahapan, yaitu pertama melakukan penyelesaian dengan mencari solusi layak awal (metode Pojok Barat Laut, metode Ongkos Terkecil dan metode Vogel) dan terakhir denangan menentukan solusi optimal (metode atu Loncatan, dan MODI).

Teori Jaringan Kerja

Teori jaringan kerja memuat persoalan-persoalan serta pemecahan dari proyek manajemen yang menyangkut perencanaan proyek serta penjadwalan. Alat yang digunakan ialah CPM dan PERT.

Pemrograman Dinamik

Pemrograman Dinamiki sangat berguna untuk suatu proses yang mencakup suatu periode waktu yang ada. Model ini akan membicarakan pengaruh dari keputusan sekarang terhadap keadaan di masa yang akan datang.

Strategi dan Teori Permainan

Teori permainan ini memberikan rangkan konsepsi dalam mana persoalan kompetisi dapat dirumuskan. ia telah digunakan secara efektif oleh dunia usaha untuk mengembangkan strategi periklanan, kebijakan harga dan waktu perkenalan produksi baru.

Pemrograman Bilangan Cacah

Pemrograman bilangan cacah merupakan bagian dari program linier yang membahas persoalan di mana jawaban dikehandaki sebagai bilangan cacah atau bilangan cacah bulat.

Beberapa teknik telah dikembangkan seperti *Gomory, Branch and bound* dan balas.

Pemrograman Non Linier

Model ini merupakan pengembangan dari model pemrograman liner, dimana dalam model ini untuk menentukan solusi optimal dapat dilakukan dengan metode analitik maupun numerik. Bentuk Model Pemrograman non Linier, model tanpa kendala, model dengan kendala dan model dengan bentuk kendala sama dengan dan atau pertidaksamaan.

Proses Stokastik

Proses stokastik adalah suatu kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang. Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang mengandung ketidakpastian.

Teori Antrian

Antrian atau sering juga disebut sebagai teori garis tunggu berkenaan dengan pertibaan acak Atau tetap pada suatu fasilitas pelayanan dengan kapasitas terbatas. Tujuan dari model ini ialah memungkinkan seseorang untuk mentukan jumlah optimum dari orang atau fasilitas yang diperlukan untuk melayani pelanggan dengan memperhatikan ongkos pelayanan dan ongkos tunggu.

Teori Persediaan

Teori persediaan membahas tentang keputusan berapa banyak barang yang dipesan dan kapan dilakukan pemesanan. Keputusan ini memuat keseimbangan antara *carrying cost* dengan satu atau lebih dari *order* atau *set up cost*, *shorttage* atau *delay cost* dan ongkos yang berkenaan dengan perubahan tingkat produksi atau pembelian. Beberapa alat yang digunakan diantaranya ialah persamaan ekomonic- lot- size (ELS) atau persamaan ekonomic- order-quantity (EOQ)

Rantai Markov

Rantai Markov sebagai bagian dari proses stokastik, khusus akan membicarakan variabel-

variabel diskrit yang banyak berkaitan dengan terapan untuk berbagai bidang.

Teori Penggantian

Teori penggantian akan membahas persoalan penggantian alat yang tua disebabkan karena usia dan juga penggantian disebabkan kerena kebijakan penggantian pada waktu-waktu yang sudah tertentu dan tetap, baik kerena pemakaiaan yang terus menerus maupun tidak dalam suatu kurun waktu. Kebijakan penggantian ini ditunjukkan untuk mencapai jumlah ongkos (biaya) yang sekecil-kecilnya (minimum).

Teori Keputusan

Ciri penting dari teori keputusan ialah bahwa akibat dan tindakan, umumnya tidak diketahui. Dalam hal ini, peluang dihubungkan dengan bermacam-macam keadaan. Kita dapat menunjuk keputusan tentang kepastian, risiko dan ketidakpastian, tergantung seberapa banyaknya kita mengetahui keadaan (*state of nature*). Cara lain untuk menaksir masa depan meski hanya tersedia sejumlah kecil informasi ialah dengan statistik Bayes.

Simulasi

Simulasi merupakann penyelesaian dengan cara numerik. kerena itu, bilangan acak digunakan untuk mensimulir pertibaan dan waktu penyelesaiaan.

BAB II

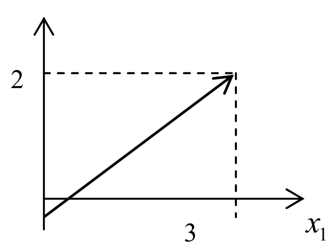
ALJABAR LINIER

Aljabar linier adalah salah satu dasar dalam penelitian operasional sebab masalah-masalah penelitian operasional akan lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep aljabar linier. Oleh sebab itu pada bab ini akan di bahan daras-dasar aljabar linier.

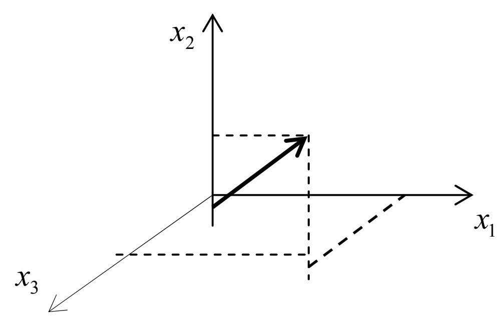
2.1 Vektor

Secara matematis vector terdiri dari orde n, sebagai contoh orde dengan pasangan berurutan (3,2) adalah vector berorde 2. Vektor dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$ dan seterusnya.

Vektor $\mathbf{a} = (3,2)$ dan vector $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dimana 3 dan 2 disebut sebagai komponen dari vektor $\mathbf{a}$ secara grafis dapat dilihat berturut-turut pada Gambar 2.1 dan 2.2.



Gambar 2.1 Vektor dalam dua dimensi



Gambar 2.2 Vektor dalam tiga dimensi

2.2 Operasi vektor

Kesamaan *Dua buah vector* $\mathbf{a}$ *dan* $\mathbf{b}$ *dikatakan sama jika dan hanya jika komponen dari vektor* $\mathbf{a}$ *dan* $\mathbf{b}$ *adalah sama.*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ dan } \mathbf{a} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

maka

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \textit{ jika dan hanya jika } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n. \tag{2.1}$$

Penjumlahan *Dua buah vector atau lebih yang berada dalam ruang yang sama dapat dijumlahkan dengan cara menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian.*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ dan } \mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

maka

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n). \tag{2.2}$$

Misalkan vektor $\mathbf{a} = (2,4)$ dan $\mathbf{b} = (3,1)$, maka penjumlahan vector $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah

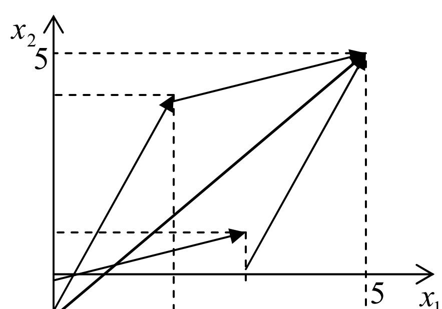
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2,4) + (3,1) = (5,5),$$

Secara grafis dapat dilihat pada Gambar 2.3.

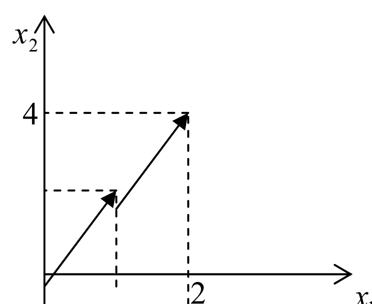
Perkalian vektor dengan skalar *Vektor dapat dikalikan dengan sebuah skalar* k,

$$\begin{aligned} k\mathbf{a} &= k(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &= (ka_1, ka_2, , ka_n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika $\mathbf{a} = (1,2)$ dan skalar $k = 2$, secara grafis dapat diperlihatkan pada Gambar 2.4



Gambar 2.3 Penjumlahan vektor



Gambar 2.4 Perkalian vektor dengan skalar

Perkalian vektor dengan skalar memenuhi hukum asosiatif $k(m\mathbf{a}) = (km)\mathbf{a}$, dan hukum distributif $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}+\mathrm{k}\mathbf{b})$ dan $(k+m)\mathbf{a} = k\mathbf{a}+\mathrm{k}\mathbf{a}$.

Pengurangan *Dua buah vektor atau lebih dalam ruang yang sama dapat dikurangkan, dinotasikan* $\mathbf{a}$ - $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ dan } \mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

maka

$$\begin{aligned}\mathbf{c} = \mathbf{a}-\mathbf{b} &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (-1)(b_1, b_2, \cdots, b_n) \\ &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (-b_1, -b_2, \cdots, -b_n) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n) \\ &= (c_1, c_2, \cdots, c_n).\end{aligned} \quad (2.4)$$

Misalkan vektor $\mathbf{a} = (2,4)$ dan $\mathbf{b} = (3,1)$, maka penjumlahan vector $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}-\mathbf{b} = (6,4)-(3,1) = (3,3)$$

Inner Product *Dua buah vektor dalam ruang yang sama dapat dikalikan yang disebut inner product*

$$\begin{aligned}\alpha = \mathbf{a.b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j\end{aligned} \quad (2.5)$$

Inner product memenuhi hukum komutatif

$\mathbf{a.b} = \mathbf{b.a}$ dan memenuhi kondisi berikut

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{a.b}+\mathbf{a.c}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(c+d) = \mathbf{a.c}+\mathbf{a.d}+\mathbf{b.c}+\mathbf{b.d}$$

Perlu diperhatikan $\mathbf{a.a} \geq 0$. *Inner product* sama dengan nol ($\mathbf{a.a} = 0$) jika dan hanya jika $\mathbf{a} = 0$.

Dua buah vektor disebut orthogonal jika *inner product*-nya sama dengan nol.

Jika $\mathbf{a} = (3,2)$ dan $\mathbf{b} = (2,\text{-}3)$ adalah orthogonal, karena $\mathbf{a.b} = 3(2) + 2(-3) = 0$.

Vektor norm

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a.b}} = \sqrt{a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \quad (2.7)$$

2.3 Linear Dependent dan Independent

Himpunan vektor $\mathbf{a_1, a_2, \cdots, a_n}$ yang berada dalam ruang yang sama R^n dikatakan "*Linearly dependent*" atau saling bergantung linier bila ada suatu himpunan dari *n* skalar yaitu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tidak semuanya nol atau paling sedikit satu $\alpha \neq 0$, bila hasil kombinasi liniernya adalah vektor nol (*null vector*). Jadi

$$\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{a_n} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

dimana 0 adalah vektor nol.

Sedangkan apabila dari *n* skalar yaitu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ masing-masing mempunyai nilai nol disebut *lynearly independent* atau saling bebas linier. Jadi dalam hal ii dapat ditulis:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{2.9}$$

Himpunan vektor $\mathbf{a_1, a_2, \cdots, a_n}$ dalam ruang R^n adalah *linear independent* jika salah satu dari vektor tersebut adalah suatu kominasi linier dari vektor-vektor lainnya. Jika salah satu dari vektor tersebut adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya, vektor-vektor tersebut, salah satunya adalah $\mathbf{a_n}$. Maka

$$\mathbf{a_n} = \alpha_1 \mathbf{a_1} + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{a_{n-1}} \tag{2.10}$$

atau

$$\alpha_1 \mathbf{a_1} + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{a_{n-1}} + (-1)\mathbf{a}_n = \mathbf{0} .$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dari seluruh skalar α tidak seluruhnya nol, tetapi (-1) dan disebut ***linear independent***.

Sedangkan apabila $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$ adalah ***linear independent***, maka α_i adalah $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Jika salah satu α , maka jelas bahwa vektor-vektor tersebut *linearly dependent*. Jadi $\mathbf{0} = \mathbf{0a_1} + \cdots + \mathbf{0a_n}$, adalah linearly dependent.

2.4 Basis

Vektor $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_m}$ merupakan himpunan spanning dari ruang E^n, jika setiap vektor pada E^n dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{x}_i$ .Dengan menggunakan pemikiran dari ruang vektor dan linearly independent, dapat diuraikan tentang suatu basis dari suatu ruang vektor.

Himpunan spanning $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$ adalah basis untuk E^n jika vektor-vektornya adalah linearly independent. Jadi basis dari E^2 memuat basis dua vektor, begitu juga basis untuk E^3 memuat tiga vektor.

Ambil $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}$ adalah basis untuk E^n, misalkan dalam E^n terdapat vektor lain dalam $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Maka

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \tag{2.11}$$

2.6 Matriks

Definisi 2.1 *Matriks adalah kumpulan dari elemen yang disusun dalam bentuk baris dan kolom, banyaknya baris dan kolom menunjukan orde dari matriks.*

Bentuk umum dari matriks orde $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

2.6.1 Operasi matriks

Penjumlahan/pengurangan Dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan/ dikurangkan jika mempunyai orde yang sama, kemudian unsur-nsur yang bersesuaian dijumlahkan/dikurangkan.

Perkaalian matriks dengan skalar Jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$. Maka A dapat dikalikan dengan skalar α, sehingga

$$\alpha A = \lfloor \alpha a_{ij} \rfloor \qquad (2.13)$$

Perkalian matriks dengan skalar memenuhi hukum komutatif.

$$\alpha[A+B] = \alpha A + \alpha B \text{ dan } (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta B .$$

Perkalian matriks *Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan jika dan hanya jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B. Jadi dalam menentukan apakah dua buah matriks dapat dikalikan atau tidak dan sekaligus untuk menentukan orde dari hasil perkaliannya, maka harus yakin bahwa banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B.*

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \qquad (2.14)$$

Perkalian matriks tidak memenuhi hukum komutatif $A \cdot B \neq B \cdot A$, tetapi di dalam hal khusus bisa berlaku $A \cdot B = B \cdot A$ (matriks *COMUT*E).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

Sifat perkalian matriks

Perkalian matriks memenuhi:

1. Hukum distibutif terhadap penjumlahan: $A(B+C) = AB + AC$.
2. Hukum assosiatif perkalian: $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$

Jenis-jenis maatriks

1) Matriks Identitas adalah suatu matriks dimana semua unsurnya bernilai nol kecuali unsur pada diagonal utama sama dengan 1.
2) Matriks kuadrat adalah suatu matriks yang mempunyai orde $n \times n$.

3) Matriks simetris adalah suatu matriks kuadrat dimana unsur $a_{ij} = a_{ji}$ untuk $i, j = 1,2,\cdots,n$.

4) *Skew-symetrik matrix* adalah suatu matriks kuadrat dimana $a_{ij} = -a_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots,n$.

5) Matrriks diagonal adalah suatu matriks semua unsurnya sama dengan nol kecuali unsur pada diagonal utama tidak sama dengan nol.

6) Matriks nol adalah suatu matriks dimana semua unsurnya sama dengan nol.

7) Matriks non singulir adalah suatu matriks dimana nilai dari determinannya tidak sama dengan nol.

8) Matriks *conpormable,* matriks *A* dikatakan *conpormable* terhadap *B* jika banyaknya kolom pada matriks *A* sama dengan banyaknya baris pada matriks *B*.

9) *Matriks idempoten*

10) Matriks partisi adalah suatu matriks yang dibagi menjadi matriks yang lebih kecil ordenya (sub matriks).

11) $\alpha[A + B] = \alpha A + \alpha B$ pada segitiga atas sama tyaiPerkalian dua buah

2.6.2 Matriks transpose

Jika matriks A berorde $m \times n$. Maka transpose dari matrika A adalah A^T . Dimana unsur-unsur baris pada matriks A merupakan unsur-unsur kolom pada A^T .

Beberapa properti dari traspose matriks:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, dimana orde matriks A sama dengan orde dari B .
3. $(AB)^T = B^T A^T$

2.6.3 Operasi baris elementer

Tiga dasar dari dari operasi baris elementer suatu matriks

1. Baris ke-*i* dapat ditukar dengan baris ke-*j* dan sebaliknya.
2. Baris ke-*i* dapat dikalikan dengan skalar α .

3. Baris ke-*j* dapat tukar dengan baris ke-*j* yang ditambah dengan skalar α .

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

1. Baris ke-1 dari matriks A ditukar dengan baris ke 2, diperoleh

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Baris ke-2 dari matriks A_1 dikalikan dengan 2, diperoleh

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Baris ke-3 dari matriks A_1 ditambah 3, kemudian ditukar dengan baris ke-1, maka diperoleh

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.7.4 Determinan

Determinan diperoleh dari matriks kuadrat, determinan dari matriks A ditulis $|A|$.

Jika diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Sehingga secara umum dika terdapat matiks *A* berorde $n \times n$ maka determinan dari matriks *A* adalah:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} \tag{2.15}$$

Sifat-sifat determinan

1. Pergantian baris an kolom atau sebaliknya tidak akan mempengaruhi nilai determinan $|A| = |A'|$

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

2. Jika dalam suatu baris atau kolom elemen-elemennya bernilai nol, maka nilai determinan ama dengan nol.
3. Jika setiap elemen pada suatu baris atau kolom dikalikan dengan suatu skalar α, maka nilai determinan akan menjadi α kali nilai determinan semula.
4. Bila dua buah baris atau kolom di tukar tempatnya, maka tanda determinan akan berubah, akan tetapinilai mutlaknya tetap.
5. Jika dua buah baris atau kolom sama elemen-elemennya, maka nilai determinanya sama dengan nol.
6. Suatu determinan nilainya tidak akan beruah ila elemen-elemen pada suatu baris atau kolom dikalikan dengan konstanta, kemudian ditambahkan atau dikurankan pada elemen-elemen baris atau kolom lainnya.
7. Determinan dari perkalian dua uah matriks sama denan hasil kali determinan matriks-matriks tersebut.
8. Determinan dari matrriks diagonal adalah hasil kali elemen-elemen diagonalnya.

2.7.5 Rank Matriks

Misalkan matriks A orde $m \times n$, apabila dari matrriks A ini dipilih beberapa beberapa baris sebanyak $s, s < m$ dan beberapa kolom sebanyak $t, t < n$, maka elemen-elemen dari s baris dan t kolom ini akan merupakan suatu matriks minor dari A.

Definisi 2.1 *Jika matriks A sedikit-dikitnya mengandung suatu ninor determinan yang tidak lengkap* (*nilai* = 0) d*an ternyata terdiri dari r baris, akan tetapi untuk minor determinan yang lain pasti akan lenyap, apabila minor metriksnya terdiri dari* (*r – 1*) *baris, maka dalam hal ini matriksnya A mempunya*i *RANK = r dan ditulis r*(*A*) = *r.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_2 = |1| = 1, \text{ jadi r}(A) = 1.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ jadi r}(B) = 2.$$

Definisi 2.2 *Kalau A matriks kuadrat dengan m baris dan n kolom, jika* $r(A) = r = n$, *maka A dikatakan matriks non singulir dan jika* $r < n$, *maka matriks dikatakan singulir.*

Rank matriks mempunyai peranan yang penting dalam penyelesaian persamaan linier simultan, sebab dengan mengetahui besarnya rank dari matriks koefisien, bisa ditentukan apakah persamaan tersebut mempunyai jawab atau tidak.

Mencari rank dengan menggunakan transformasi elementer

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$$, tentukan rank A?

Langkah-langkah

1. Kalikan baris pertama dengan $\frac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$$

2. Kurangkan baris pertama pada baris kedua

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$$

4. Kalikan baris ketiga dengan $\frac{1}{5}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

5. Kurangkan baris pertama pada baris ketiga

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

6. Kalikan baris ketiga dengan -1

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Baris ke 1 dikurang 5 kali baris ketiga

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Jadi $rank \quad A = 2$.

Jika $C = A \times B$, maka $r(c) = \min\{r(A), r(B)\}$.

2.6.6 Matriks decomposible

Statu matriks $A_{n\times n}$ dikatakan decomposible jika dengan pertukaran beberapa baris dan kolom-kolom yang bersesuaian memungkinkan untuk memperoleh nol matriks pada pojok sebelaah kiri bawah, sehingga A dapat ditulis:

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, dimana A_{11} dan A_{22} merupakan matriks kuadrat.

Jika sebaliknya disebut indecomposible. Supranto 1974.

2.6.7 Inverse matriks

Definisi 2.3 *A adalah matriks matriks kuadrat dengan ordo $n \times n$ dan I_n suatu matriks identitas, jika ada matriks kuadrat A^{-1} sedemikian sehingga berlaku relasi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A^{-1} disebut imverse dari matriks A.*

Cara mencari inverse matriks

1. Metode substitusi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$, misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+3c & 3b+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2a+3c = 1$$

$$3a+3c = 0$$

$$2b+3d = 0$$

$$3b+5d = 1$$

$$a = 5, \quad b = -3, \quad c = -3 \text{ dan } d = 2$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2.6.8 Metode Adjoint matriks

Jika matriks A adalah matriks kuadrat dengan ordo $n \times n$, dan setiap elemen dari matriks mempunyai ko-faktor, yaitu elemen a_{ij} mempunyai ko-faktor K_{ij}

$$K = (K_{ij}) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Adjoint matriks adalah suatu matriks yang elemen-elemennya terdiri dari transpose dari semua kofaktor dari elemen-elemen matriks.

Jika K_{ij} kofaktor dari A, maka

$$adj(A) = K^T = (K_{ij}^T = K_{ji}). \tag{2.17}$$

$$adj(A) = K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

dimana A_{i1}=kofaktor , elemen $a_{i1} = (-1)^{i+1} \times$ determinan dari matriks kofaktor dari *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{11} = -3$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{12} = 11$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{13} = -10$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{21} = -1$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{22} = 4$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{23} = -4$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{31} = 3$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{32} = -12$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{33} = 11$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} -3 & 11 & -10 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = K_{ij}^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 11 & 4 & -12 \\ -10 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 *Matriks* A *adalah matriks kuadrat ordo* $n \times n$*, dan merupakan matriks yang non-singulir yaitu* $\det(A) \neq 0$, K_{ij} *merupakan kofaktor dari elemen* a_{ij}*, maka inverse dari* A *dirumuskan sebagai berikut*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{K^T}{\det(A)}. \tag{2.18}$$

Dari contoh di atas maka inverse matriks A adalah

$$|A| = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = -1 \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 11 & 4 & -12 \\ -10 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -11 & -4 & 12 \\ 10 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

2.7 Himpunan konveks

Ambil E adalah ruang linier (riil) dan $X \subseteq E$.

Definisi 2.5 Ştefănescu [9] X *adalah konveks jika* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, *dimana* $x_1, x_2 \in X$ *dan* $\lambda \in [0,1]$.

Proposisi 2.1 X *adalah konveks jika dan hanya jika:*

$$k \in N, x_1, x_2, \cdots, x_k \in X, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_3 \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$$

Irisan dari himpunan konveks adalah konveks.

Definisi 2.6 Ştefănescu [9] *Konveks hull dari* X (*coX*) *adalah irisan dari semua himpunan konveks pada X. Dengan kata lain bahwa himpunan konveks dari E termuat dalam X.*

Definisi 2.7 Supporting hyperplane dari X adalah suatu hyperplane $\mathsf{H}_{p,\alpha}$ dengan properties:

a. $X \cap \mathsf{H}_{p,\alpha} \neq \phi$

b. $X \subseteq \{x \in E | \langle p, x \rangle \leq \alpha\}$ atau $X \subseteq \{x \in E | \langle p, x \rangle \geq \alpha\}$.

Hyperplane H dalam E^n didefinisikan bahwa himpunan dari titik $= (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ yang memenuhi persamaan

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + \cdots + h_n x_n = b$$

atau

$$= b,$$

untuk nilai-nilai h_i (tidak semua $h_i \neq 0$) dan *b*. Jadi jika untuk E^2 diperoleh bentuk garis

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 = b \,.$$

Pada E^3 diperoleh persamaan bidang.

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = b \,.$$

Hyperplane E^n dibagi dalam dua bagian, dinotasikan dengan

$$H^+ = \left\{ \ \middle| \quad \geq b \right\} \text{ dan } H^- = \left\{ \ \middle| \quad \leq b \right\} .$$

Sebagai contoh ambil persamaan bidang $3x_1 - 2x_2 = 6$. Maka

$H^+ = \left\{ \ \middle| \quad \geq b \right\}$ didefinisikan

$$H^+ : \quad 3x_1 - 2x_2 \geq 6$$

dan H^- didefinisikan

$$H^- : \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \,.$$

Titik-titik pada garis $3x_1 - 2x_2 = 6$, berada pada kedua bagian tersebut.

Hyperplane adalah himpunan konveks. Jika $_1$ dan $_2$ ada pada hyperplane, sehingga

$$_1 = b \text{ dan } \quad _2 = b$$

Ambil $\quad = \lambda \quad + (1-\lambda) \quad _2$, kombinasi konveks dari $_1$ dan $_2$. Maka

$$\begin{aligned} &= \ \left[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \right] \\ &= \lambda \ \ x_1 + (1-\lambda) \ \ x_2 \\ &= \lambda b + (1-\lambda) b \\ &= b \end{aligned}$$

Jadi adalah pada hyperplane**.** Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa bagian ruang $H^+ \ dan \ H^-$ adalah juga konveks.

BAB III

PEMROGRAMAN LINIER

3.1 Pendahuluan

Pemrograman linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber daya yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara terbaik yang mungkin dilakukan. Secara umum Pemrograman Linier dapat dikatakan sebagai masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas seperti, buruh, bahan baku, mesin dan modal, dengan cara sebaik mungkin sehingga diperoleh keputusan terbaik.

Syarat-syarat keputusan terbaik adalah sebagai berikut :

1. Adanya variabel keputusan (tidak negatif)
2. Adanya kendala/keterbatasan dari kelangkaan sumber daya dan sumber dana.
3. Adanya kriteria (maksimasi/minimasi)

Teknik pemrograman linear dipergunakan secara luas untuk memecahkan persoalan-persoalan dalam bidang militer, ekonomi, industri dan sosial.

Prosedur pemecahan masalah pemrograman linier bersifat iteratif, sehingga untuk pemecahan persoalanyang agak besar harus menggunakan komputer.

3.2 Memformulasikan model pemrograman linier

Terdapat tiga langkah dalam memformulasikan model Pemograman Linier, yaitu :

1. Tentukan variabel keputusan yang ingin diketahui, kemudian gambarkan dengan simbol-simbol aljabar.
2. Tentukan semua keterbatasan atau kendala dan gambarkan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linier dari variabel keputusan tadi.
3. Tentukan kriteria atau tujuan dan gambarkan dalam bentuk fungsi linier dari variabel keputusan tadi (maksimasi/minimasi)

Contoh : Suatu perusahaan akan menjadwalkan produksi dari peralatan dapur yang membutuhkan dua jenis sumber yaitu tenaga buruh dan bahan baku. Perusahaan telah merencanakan tiga jenis model dan ketiganya membutuhkan sumber dan memberikan keuntungan sebagai Tabel 1.1.

Penyediaan bahan baku yang dapat dilakukan per hari adalah 200 kg. sedangkan kapasitas tenaga kerja yang dimiliki adalah 150 jam/hari.

Bagaimana perumusan model pemrograman linier dari masalah di atas agar keuntungan totalnya maksimum.

Tabel 1.1 Sistematika model

	MODEL		
	A	B	C
Buruh (jam/satuan)	7	3	6
Bahan baku(kg/satuan)	4	4	5
Keuntungan (Rp/satuan)	40	20	30

3.3. Soal latihan

1. Seorang petani besar memiliki tanah seluas 50 ha. yang akan ditanami padi, jagung dan kedelai. Untuk mengelola tanahnya ini dia memiliki modal sebesar Rp 6.000.000,- untuk biaya persiapan penanaman.Ketiga jenis tanaman ini memerlukan tenaga kerja, biaya dan memberikan keuntungan masing-masing sebagai berikut :

Tanaman	orang hari/ha.	biaya/ha (Rp)	keuntungan/ha
Padi	6	100.000	60.000
Jagung	8	150.000	100.000
Kedelai	10	120.000	80.000

   Rumuskan persoalan di atas dalam model Pemrograman Linier ?

2. Sebuah perusahaan iklan menawarkan program advertensi melalui media masa yaitu radio, koran dan majalah. Ketiga media masa tersebut dianggap merupakan media yang paling efektip untuk mencapai jumlah konsumen terbanyak. Perusahaan iklan tersebut memberikan data dari hasil penelitiannya sebagai berikut :

	RADIO		KORAN	MAJALAH
	SIANG	MALAM		
Biaya iklan per sekali muat	40.000	75.000	300.000	15.000
Jumlah Konsumen potensial	400.000	900.000	500.000	200.000
yang dapat di capai				
Jumlah konsumen wanita yang dapat dicapai	300.000	400.000	200.000	100.000

Perusahaan yang akan memasang iklan menyatakan bahwa dana yang tersedioa untuk iklan tidak lebih dari Rp 800.000,00. Dengan dana sebesar ini dia targetkan bahwa (1) paling sedikit dapat mencapai 2 juta konsumen wanita, (2) dana untuk iklan di radio maksimum Rp 500.000,00 , (3) paling sedikit 3 kali muncul si radio siang , dua kali di radio malam dan (4) iklan di koran minimal 5 kali muncul dan iklan di majalah maksimal 10 kali.

Tentukan model pemrograman linier dari masalah di atas ?

3. Sebuah perusahaan industri, menghasilkan dua jenis produk (produk I dan produk II), masing-masing memerlukan 2 macam bahan baku *A* dan *B*. Harga jual tiap satuan produk I Rp 150,- dan produk II Rp 100,- . Bahan baku A yang tersedia adalah 600 unit dan bahan baku *B* yang tersedia adalah 1000 unit. Satu satuan produk I memerlukan satu satuan *A* dan dua satuan *B*, sedangkan produk II memerlukan satu satuan *A* dan satu satuan *B*. Tentukan model pemograman linier dari masalah di atas ?
4. Sebuah perusahaan angkutan bermaksud membeli truck-truk. Setelah menghubungi berbagai importir, ternyata ada 3 jenis kendaraan yang memenuhi syarat-syarat teknik yang ditentukan, masing-masing dengan merk : HYPER, SUPER dan PERFECT. Keputusan terakhir harus diambil berdasarkan data di bawah ini :

Karakteristik	Truck Hyper	Truck Super	Truck Perfect
Harga per buah	2.250.000	5.000.000	4.000.000
Muatan	10 ton	20 ton	20 ton
Kecepatan	60 km/jam	50 km/jam	50 km/jam

5. Truch Hyper, Super dan Perfect rata-rata dapat beroperasi selama berturut-turut 10, 20 dan 15 jam/hari. Fasilitas pemeliharaan dan sopir yang berpengalaman hanya tersedia hanya tersedia paling banyak untuk 30 buah kendaraan. Jika uang yang tersedia besarnya sebanyak Rp 120.000.000, berapa buah truck dari tiap-tiap merk yang harus dibeli apabila perusahaan menghendaki kendaraan-kendaraan yang dibeli memiliki ukuran efektivitas sebesar-besarnya yang dinyatakan dalam ton km per hari. Dari masalah di atas tentukan model pemograman linier ?
6. PT. "KITA" mempunyai 600 orang pegawai dan menghadapi persoalan untuk mengurangi biaya-biaya umum.

   Tiap pegawai mendapat penggantian ongkos jalan Rp 50,- per hari. Untuk mengguranggi biaya transportasi ini, direncanakan untuk membeli sejumlah micro bus dan bus yang masing-masing dapat memuat 15 dan 40 orang untuk antar jemput pegawai. Untuk itu perusahaan menyediakan dana dalam jumlah terbatas, masing-masing untuk maintanance kendaraan Rp 225.000,- per bulan dan bensin 450 liter per hari. Selanjutnya dari tiap kendaraan diketahui :

	Micro Bus	Bus
Maintanance per bulan	Rp. 7.500	Rp. 10.000
Pemakaian bensin	10 liter	30 liter

   Tentukan model pemograman linier dari masalah di atas, jika Micro bus memiliki life time yang relatif lebih panjang dari bus.
7. Suatu perusahaan makanan hendak membuat makanan murah berdasarkan nilai gizi. Bahan untuk membuat makanan itu adalah : kentang dan daging sapi. Menurut ketentuan dari jawatan kesehatan, makanan itu harus mengandung paling sedikit : 12 unit karbohidrat, 24 xunit vitamin dan 9 unit protein. Dari penyelidikan yang dilakukan di Laboratorium diketahui bahwa 1 Kg. kentang mengandung : 3 unit karbohidrat, 4 unit vitamin dan 1 unit protein. 1 Kg. daging sapi mengandung : 1 unit karbohidrat, 3 unit vitamin, dan 3 unit protein. Harga kentang Rp 1.000,- per kg dan daging sapi Rp 12.000,- per kg.

   Tentukan model PL dari masalah di atas agar diperoleh ongkos minimum.

3.4 Bentuk umum model pemrograman linier

$$
\begin{aligned}
maksimasi \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s/t \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\le, =, \ge) b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\le, =, \ge) b_2 \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\le, =, \ge) b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Bentuk (3.1) ekivalen dengan

$$
\begin{aligned}
& maksimasi\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& s/t: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\le, =, \ge) b_m ,\ i = 1,2,\cdots,m
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
& maksimasi\ Z = CX \\
& s/t \quad AX\ (\le, =, \ge) \\
& X \ge 0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ variabel keputusan x_j

$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ koefisien ongkos c_j

$= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ konstanta ruas kanan (RK)

$X \ge 0$ batasan yang tidak negatif

Dua bentuk model pemrograman linier :

1. Bentuk Kanonik :

   Karakteristik dari bentuk ini adalah sebagai berikut :

1. Semua variabel keputusan tidak negatif
2. Semua kendala berbentuk pertidaksamaan
3. Fungsi tujuan berbentuk maksimasi/minimasi

$$
\begin{array}{rl}
maksimasi & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s/t & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_2 \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_nx_n\,(\le, =, \ge)\,b_n \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{array} \tag{3.3}
$$

2. Bentuk Standar

Karakteristik dari bentuk ini adalah sebagai berikut :

1. Semua variabel keputusan tidak negatif
2. Semua kendala berbentuk sama dengan (=), kecuali kendala non negatif
3. Fungsi tujuan berbentuk maksimasi/minimasi
4. Konstanta ruas kanan tidak negatif

$$
\begin{array}{rl}
maksimasi & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s/t & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_nx_n = b_n \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \\
& b_1, b_2, \cdots, b_n \ge 0
\end{array} \tag{3.4}
$$

3.5 Modifikasi Formulasi :

Modifikasi formulasi pada model pemograman linier dapat dilakukan pada:

1. Fungsi Tujuan
2. Kendala
3. Variabel Keputusan

3.6 Asumsi-asumsi pemograman linier

Untuk menunjukkan masalah optimasi sebagai Pemrograman Linier, diperlukan beberapa asumsi yang terkandung dalam formulasi Pemrograman Linier. Asumsi-asumsi itu adalah :

1. Proporsionalitas

Variabel keputusan x_j, kontribusinya terhadap biaya atau keuntungan adalah c_jx_j , sedangkan kontribusinya terhadap pembatas ke-i adalah $a_{ij}x_j$. Hal ini bahwa bila x_j berlipat ganda, maka kontribusinya terhadap ongkos dan terhadap setiap pembatas juga berlipat ganda.

2. Aditivitas

Asumsi ini menjamin bahwa total ongkos atau keuntungan adalah jumlah dari ongkos-ongkos atau keuntungan individual, dan total kontribusi terhadap pembatas ke-i adalah jumlah kontribusi individual dari kegiatan individual.

3. Divisibilitas

Asumsi ini menjanjikan bahwa variabel keputusan dapat dibagi ke dalam pemecahan sehingga dapat diperoleh nilai-nilai non integer.

4. Deterministik

Asumsi ini menjamin bahwa seluruh parameter modelnya (a_{ij}, b_i dan c_j) adalah konstanta-konstanta yang diketahui. Dalam kenyataan asumsi ini jarang dapat dipenuhi secara tepat.

BAB IV

METODE PENYELESAIAN
MODELPEMROGRAMAN LINIER

4.1 Pendahuluan

Pada dasarnya, metode-metode yang dikembangkan untuk memecahkan model Pemograman Linier ditunjukkan untuk mencari solusi dari beberapa alternatif solusi yang dibentuk oleh persamaan-persamaan pembatas/kendala, sehingga diperoleh nilai fungsi tujuan optimum. Terdapat dua metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan model Pemrograman Linier, yaitu metode grafik dan numerik/metode simpleks.

Metode grafis dapat digunakan apabila persoalan pemrograman Linier yang akan diselesaikan paling banyak mengandung tiga variabel keputusan. Walaupun demikian cara ini telah memberikan satu petunjuk penting bahwa untuk memecahkan persoalan-persoalan pemograman Linier, kita hanya perlu memperhatikan titik-titik ekstrem pada daerah feasible.

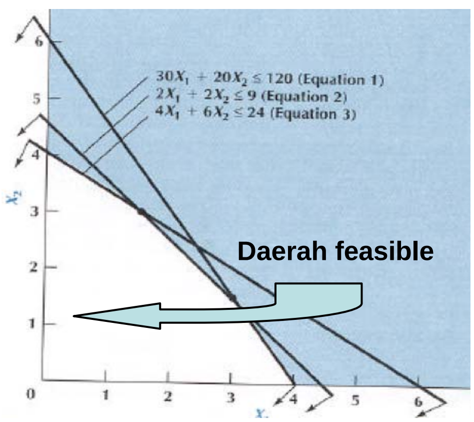
Metode Simpleks merupakan teknik yang paling berhasil dikembangkan untuk memecahkan persoalan-persoalan model pemrograman Linier yang mempunyai jumlah variabel keputusan dan pembatas yang besar. Algoritma simpleks ini diterangkan dengan menggunakan logika secara aljabar matriks, sedemikian sehingga operasi perhitungan dapat dibuat lebih efisien.

4.2 Metode Grafis

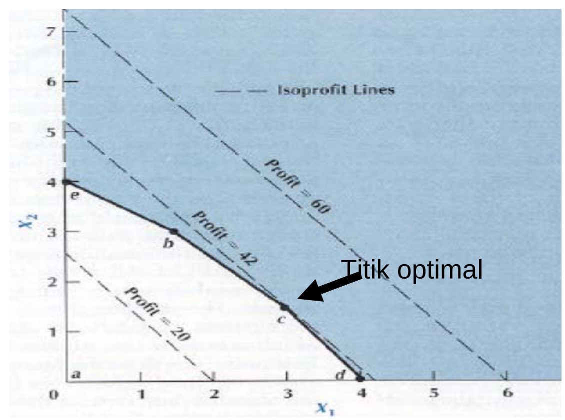
Tujuan dari metode grafis bukan untuk mendapatkan metode yang praktis bagi pemecahan model pemograman linier, karena umumnya persoalan pemograman linier melibatkan sejumlah variabel yang banyak. Metode ini menunjukkan konsep dasar dari pengembangan teknik umum bagi pemograman linier yang memiliki variabel lebih dari dua. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

$$
\begin{aligned}
ofit(maksimasi) \quad & Z = 10x_1 + 8x_2 \\
s/t \quad & 30x_1 + 20x_2 \le 120 \\
& 2x_1 + \ 2x_2 \ \le \ \ 9 \\
& 4x_1 + \ 6x_2 \le \ 24 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas pertama-tama tentukan daerah feasible, yaitu daerah yang merupakan irisan dari semua kendala, seperti pada Gambar 4.1. Kemudian tentukan nilai optimal dengan menggunakan fungsi obyektif, seperti pada Gambar 4.2 dan diperoleh nilai optimal $Z = 42$, untuk $x_1 = 3$ dan $x_2 = 1{,}5$.



Gambar 4.1 Daerah feasible



Gambar 4.2 Titik optimal

4.3 Metode Simpleks

Penyelesaian dengan metoda grafik bukan merupakan metoda praktis bagi penyelesaian model Pemrograman Linier (PL), karena pada umumnya persoalan PL melibatkan sejumlah variabel yang banyak. Metoda ini menunjukkan konsep dasar dari pengembangan teknik umum pemrograman linier yang memiliki variabel lebih dari dua.

Metoda Simpleks pertama kali dikembangkan oleh **G.B. Dantzig** dan penyelesaiaannya merupakan proses ITERASI.

Langkah-langkah:

1. Ubah bentuk persoalan PL ke dalam bentuk standar.
2. Uji apakah bentuk standar mempunyai solusi layak awal atau tidak ?
3. Apakah solusi layak awal sudah optimal atau belum ?, jika sudah optimal (maksimasi : $\bar{c}_j \leq 0$ dan atau $\theta < 0$ dan minimasi: $\bar{c}_j \geq 0$ dan atau $\theta < 0$) lanjutkan pada langkah 4. Jika belum optimal lanjutkan pada langkah ke 5 dan langkah 6.
4. Jika sudah optimal, tentukan nilai OPTIMAL ?
5. Jika belum optimal tentukan solusi layak yang baru, dengan memilih variabel non basis untuk menjadi variabel basis baru (*entering variable*). Untuk itu, pilih variabel basis yang akan memberikan perubahan tertinggi, yaitu variabel non basis yang mempunyai nilai koefisien ongkos relatif tertinggi (maks). Perhatikan Tabel simpleks 4.1.
6. Tentukan variabel basis yang keluar (*leaving variable*), $\theta = \min\{\theta, \theta \geq 0\}$.
7. Cari sistem kanonik baru dan solusi basis layak yang baru dengan operasi *PIVOT*. Kembali ke langkah 2.

Tabel 4.1 Tabel Simpleks

	C_j	c_1	c_2	…	c_n	RK	Θ
C_B	Basis	x_1	x_1	…	x_1		
$\bar{c}_j$						Z =	

C_B	Koefisien ongkos variabel basis
C_j	Koefisien ongkos
$\bar{c}_j$	Koefisien ongkos relatif
Basis	Variabel basis
RK	Ruas kanan
θ	Rasio antara ruas kanan dengan kolom yang masuk basis
Z	Nilai fungsi tujuan

Contoh

1. Maksimasi $Z = 4x_1 + 3x_2$

dengan Kendala :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
-3x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
2x_2 &\leq 5 \\
2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Langkai 1 Rubah model pemograman kedalam bentuk standar :

Maksimasi $Z = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

dengan kendala:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + S_1 &= 6 \\
-3x_1 + 2x_2 + S_2 &= 3 \\
2x_2 + S_3 &= 5 \\
2x_1 + x_2 + S_4 &= 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Langkah 2 Tentukan apakah bentuk standar mempunyai solusi layak awal?

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
2	3	1	0	0	0
-3	2	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	1

Langkah 3 Apakah solusi layak awal sudah optimal ?, untuk menetukan nilai optimal gunakan Tabel simpleks.

Iterasi 1

	C_j	4	3	0	0	0	0	RK	θ
C_B	Basis	x_1	x_1	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1	2	3	1	0	0	0	6	3
0	S_2	-3	2	0	1	0	0	3	-1
0	S_3	2	0	0	0	1	0	5	2/5
0	S_4	2	1	0	0	0	1	4	2
	$\bar{c}_j$	4	3	0	0	0	0	$Z = 0$	

Solusi belum optimal, lanjutkan pada iterasi 2

Iterasi 2

	C_j	4	3	0	0	0	0	RK	Θ
C_B	Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1	0	2	1	0	0	-1	2	
0	S_2	0	7/2	0	1	0	3/2	9	
0	S_3	0	2	0	0	1	0	5	
4	x_1	1	1/2	0	0	0	1/2	2	
	$\bar{c}_j$	0	1	0	0	0	0	Z =8	

Iterasi 3

	C_j	4	3	0	0	0	0	RK	Θ
C_B	Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
3	x_2	0	1	½	0	0	-1/2	1	
0	S_2	0	0	-7/4	1	0	13/4	11/2	
0	S_3	0	0	-1	0	1	1	3	
4	x_1	1	0	-1/4	0	0	3/4	3/2	
	$\bar{c}_j$	0	0	-1/2	0	0	-9/2	Z =9	

Dari iterasi 3 di atas, menunjukkan bahwa koefisien ongkos relative semuanya sudah negative dan nol, maka tidak ada variabel non basis lainnya yang dapat menaikan harga fungsi tujuan, berarti solusi sudah optimal, yaitu nilai $Z = 9$ untuk $x_1 = \frac{3}{2}$ dan $x_2 = 1$.

Dari contoh di atas menunjukkan bahwa hanya ada tiga variabel atau tiga titik ekstrim yang layak yang masuk dan terlibat dalam perhitungan sebelum solusi optimal dicapai. Berarti tidak perlu mencoba kelima titik ekstrem yang ada satu satu persatu untuk mendapatkan solusi optimal.

2. Tentukan nilai optimal dari model pemrograman linier berikut :

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maksimasi} & Z = & 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{s/t} \quad : & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 14 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3}$$

4.4 Metode Simpleks Big M

Salah satu tuntutan utama dari metode simpleks adalah adanya solusi basis layak awal. Tanpa itu tablo simpleks tidak dapat dibentuk. Terdapat dua pendekatan dasar untuk mencari solusi basis layak awal:

1. *Tial and Error*

   Cara ini dilakukan secara semarang dipilih satu variael asis dari tiap kendala, kemudian ubah sistem persamaan ke dalam sistem persamaan kanonik dengan memperhatikan variabel basis tadi. Jika system kanonik ini memberikan solusi basis yang layak, maka tablo awal dapat dientuk untuk memulai metode simpleks. Dalam pencarian seperti ini tidak mustahil ruas kanan dari kendala menjadi negative selama peruahan, maka solusi menjadi tidak layak. Kemudian dicari kemungkinan lain sehingga solusi asis layak dapat dapat diperoleh. Tetapi hal ini memerlukan waktu yang lama dan tidak efisien.

2. Mengunakan variabel semu

   Cara ini cukup sistematis untuk mendapatkan system persamaan kanonik, sehingga tablo awal dapat segera terbentuk. Pertama ubah persoalan pemograman linier ka dalam bentuk standar, kemudian periksa apakan semua kendala memiliki variabel basis? Jika tidak tambahkan satu variabel yang akan bertindak seaai variabel basis, sampai semua kendala memiliki variabel basis, sehingga tablo awal dapat dibentuk.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

Tentukan nilai optimal dari model pemrograman linear berikut :

$$\begin{aligned} &\textit{Minimasi} \quad Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ &s/t \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ &\quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ &\quad 2x_1 - x_3 = -1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Bentuk standar:

$$\begin{aligned} &Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 \\ &s/t \quad x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11 \\ &\quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 = 3 \\ &\quad -2x_1 + x_3 = 1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Kendala pertama pada (4.5) mempunyai asis yaitu S_1, karena yan lainnya tidak memiliki asis maka kendala kedua dan ketiga perlu ditamahkan variael artificial (semu) (R_1 dan R_2).

$$\begin{aligned} &Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2 \\ &s/t \quad x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11 \\ &\quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3 \\ &\quad -2x_1 + x_3 + R_2 = 1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Problem (4.6) mempunyai solusi layak awal.

Iterasi 1

C_B	C_j \ Basis	-3	1	1	0	0	M	M	RK	θ
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2		
0	S_1	1	-2	1	1	0	0	0	11	11
M	R_1	-4	1	2	0	-1	1	0	3	3/2
M	R_2	-2	0	1	0	0	0	0	1	1
	$\overline{c}_j$	-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	Z = 4M	

Solusi belum optimal !

Iterasi 2

C_B	C_j \ Basis	-3	1	1	0	0	M	M	RK	θ
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2		
0	S_1	3	-2	0	1	0	0	-1	10	-
M	R_1	0	1	0	0	-1	1	-2	1	1
1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1	-
	$\overline{c}_j$	-1	1-M	0	0	M	0	3M-1	Z = M+1	

Iterasi 3

C_B	C_j \ Basis	-3	1	1	0	0	M	M	RK	θ
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2		
0	S_1	3	0	0	1	-2	2	-5	12	
1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1	
1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1	
	$\overline{c}_j$	-1	0	0	0	1	M+1	M+1	Z =2	

Iterasi 4

C_B	C_j / Basis	-3 x_1	1 x_2	1 x_3	0 S_1	0 S_2	M R_1	M R_2	RK	θ
-3	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	4	
1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1	
1	x_3	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	9	
	$\bar{c}_j$	0	0	0	1/3	1/3	M-1/3	M-2/3	Z=-2	

Iterasi 4 optimal dan solusi optimal $Z = -2$, untuk $x_1 = 4, x_2 = 1$ dan $x_3 = 9$.

4.5 Jenis-jenis solusi

4.5.1 Optimum pengganti

Solusi optimal pada problem (4.3), variabel non basis S_3 mempunyai nilai 0 (nol). Hal ini berarti bahwa setiap peningkatan harga S_3 tidak akan membawa perubahan pada fungsi tujuan. Atau S_3 dapat menjadi variabel basis dengan solusi optimal Z = 14. dengan $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 13/4$, $S_3 = 15/4$ dan $S_1 = S_2 = 0$.

Secara umum solusi pengganti dapat diperoleh jika harga koefisien ongkos relatif dari variabel non basis nol pada table optimal.

4.5.2 Optimum unik

Solusi optimum dikatakan unik jika semua koefisian ongkos relatif dari variabel non basis < 0, seperti pada problem (4.2).

4.5.3 Masalah-masalah perhitungan

1. Pemilihan variabel non basis.

Pemilihan variabel non basis ditentukan oleh variabel basis yang memberikan perbaikan terbesar pada fungsi tujuan. (maks. $\overline{cj}$ > 0(paling positif), min $\overline{cj}_j$ < 0 (paling negatif)

Dalam hal muncul beberapa variabel non basis yang memiliki koefisien ongkos relatif terbesar, maka satu-satunya jalan yang dapat diambil adalah memilih diantara beberapa variabel non basis tersebut secara sembarang.

2. Pemilihan perbandingan Minimum dan Degeneracy.

Dalam menentukan pemilihan variabel yang keluar basis kadang-kadang muncul masalah yaitu munculnya dua angka perbandingan minimum yang sama, hal ini akan menimbulkan beberapa kesulitan yang mengakibatkan kurang efisiennya metoda Simpleks yang digunakan.

Perhatikan contoh pada tabel 4.2 untuk fungsi tujuan maksimasi berikut :

Tabel 4.2

C_B	Cj	0	0	0	2	0	3/2	RK
	Basis	x_1	X_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1	0	0	1	-1	0	2
0	X_2	0	1	0	2	0	1	4
0	x_3	0	0	1	1	1	1	3
	$\overline{cj}$	0	0	0	2	0	3/2	Z = 0

dan seterusnya.

Dari Tabel 4.2 di atas memberikan gambaran bagaimana kemungkinan sebuah table di bawah degeneracy, tidak memberikan nilai Z yang meningkat. Dalam beberapa kasus dapat terjadi beberapa perubahan variabel basis (keluar/masuk) tanpa memberikan perubahan nilai fungsi tujuan ======> *CYCLING.*

3. Solusi tak terbatas

Kesulitan lain dari aturan perbandingan terkecil adalah jika terdapat variabel basis yang harus keluar tidak dapat ditentukan. Hal ini terjadi jika tidak ada satupun dari koefisien variabel non basis pada kendala yang mempunyai nilai positif (berarti tidak ada perbandingan yang dapat dibentuk, sehingga aturan perbandingan terkecil tidak dapat digunakan.

Perhatikan problem berikut :

Maksimasi $Z = 2x_1 + 3x_2$

s/t : $x_1 - x_2 + S_1 = 2$

$$-3x_1 + x_2 + S_2 = 4 \qquad (4.7)$$

$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

Iterasi 1

C_B	Cj Basis	2 x_1	3 x_2	0 S_1	0 S_2	RK
0	S_1	1	-1	1	0	2
0	S_2	-3	1	0	1	4
	$\overline{cj}$	2	3	0	0	Z= 0

Iterasi 2

CB	Cj Basis	2 x_1	3 x_2	0 S_1	0 S_2	RK
0	S_1	-2	0	1	1	6
0	x_2	-3	1	0	1	4
	$\overline{cj}$	11	0	0	-3	Z=12

Iterasi 2 tidak optimal, dan variabel basis x_1 dapat memasuki basis, tetapi dari variabel basis sendiri tidak ada yang dapat menurunkan nilainya menjadi nol. Hal ini disebabkan oleh nilai koefisien dari kendala pada variabel non basis x_1 , negatif. Sehingga jika x_1 naik, maka baik S_1 maupun x_2 akan naik harganya dan tidak dapat menjadi nol untuk membatasi kenaikan x_1. Karena x_1 dapat meningkat secara tak terbatas dan karena kenaikan satu satuan x_1 dapat meningkatkan Z sebesar 11, maka kenaikan x_1 yang tak terbatas dapat meningkatkan kenaikan Z secara tak terbatas pula.

4.6 Metode dua Fasa

Metoda ini merupakan pendekatan lain untuk mengatasi variabel semu (*artificial*). Dalam pendekatan ini persoalan pemrograman linear dibagi dalam dua tahapan.

Fasa 1

Pada fasa ini solusi layak awal dari persoalan semula dicari. Kemudian buat fungsi tujuan semu, yang merupakan minimasi dari jumlah semua variabel semu, selanjutnya cari solusi optimal dengan menggunakan metoda Simpleks. Jika fungsi tujuan semu mempunyai nilai optimal nol, berarti semua variabel semu sudah diturunkan menjadi nol, dan kita memiliki solusi basis layak bagi persoalan semula, kemudian lanjutkan pada fasa 2.

Jika Solusi akhir pada fasa 1 ini bernilai positif, berarti ada variabel semu yang bernilai positif, maka persoalan tidak layak, perhitungan dapat dihentikan tanpa melanjutkan pada fasa 2.

Fasa 2

Pada fasa ini solusi basis layak yang ditemukan pada fasa 1 dioptimalkan dengan menggunakan fungsi tujuan semula. Jadi solusi akhir pada fasa 1 menjadi table awal pada fasa 2 setelah merubah fungsi tujuannya. Kemudian gunakan kembali metoda simpleks untuk mencari solusi optimal.

Sebagai ilustrasi gunakan contoh pada problem (4.3).

4.6 Metoda Simpleks yang diperbaiki

Metode simpleks yang telah dibicarakan di atas, melakukan perhitungan pada seluruh tablo pada setiap iterasi. Informasi yang diperlukan pada dalam perpindahan dari satui iterasi ke iterasi lannya adalah sebagai berikut:

1. Koefisien ongkos relative $\overline{c}_j$.
2. kolom yang berhubungan dengan variabel non basis yang akan memasuki basis (kolom pivot).
3. Variabel basis yang ada,dan harganya (konstanta ruas kanan).
4. Informasi yang adapada kolom yang lain selain tiga hal di atas tidak memiliki peran pada proses simpleks. Karena itu pemecahan persoalan pemograman linier yang besar pada computer menjadi tidak efisien dan perlu biaya yang mahal jika perhitungan simpleks dilakukan dalam bentuk tablo penuh. Maka dilakukan perbaikan, dan dikembangkanMetode Simpleks yang Diperbaiki (RevisedSimplex) atauMetode Simpleks dengan Multiplier, yang dapat digunakan pada semua computer komersial.

Perhatikan model pemograman linier berikut:

$$\begin{aligned} &Opt\ Z = CX \\ &s/t \quad AX = b \qquad\qquad (4.8) \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned}$$

Misalkan $C = \left[C_B\ C_N\right],\ A = B_N,\ X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix},\ B$: matriks kuadrat sebaai basis

B^{-1} inverse dari B, maka $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$

$$\begin{aligned} Z &= C_B B^{-1}b - C_B B^{-1}NX_n + C_N X_N \\ &= C_B B^{-1}b - (C_B B^{-1}N - C_N)X_N \end{aligned}$$

N dapat ditulis sebagai $[a_1 \cdots a_k \cdots]$ dimana j dan k, tidak dalam basis B.

$B^{-1}N$ dapat ditulis $B^{-1}[a_1 \cdots a_k \cdots] = [B^{-1}a_1 \cdots B^{-1}a_k \cdots]$: vector kolom bau di luar basis.

Misalkan

$$\begin{aligned} W &= C_B B^{-1} \\ Z_0 &= C_B B^{-1}b \\ Z_j &= Wa_j \\ Z &= Z_0(W[a_j \cdots a_k \cdots]) - C_N X_N \\ &= Z_0([Wa_j \cdots Wa_k \cdots] - C_N)X_N \\ &= Z_0 - (Z_{ij} - C_{ij})X_i \end{aligned}$$

Tabel Simpleks biasa :

Tabel awal :

Z	X_N	X_B	
1	$-C_N$	$-C_B$	b
0	N	B	b

Tabel selanjutnya **:**

1	**0**	$C_B B^{-1}N - C_N$	$C_B B^{-1}b$
0	***I***	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Metode simpleks yang diperbaiki

W	$C_B b'$	$Z_k - C_k$
0	b'	Y_k

$b' = B^{-1}b$ $= Na_{ij} - C_i$
$Y_k = B^{-1}a_k$

Langkah-langkah :

1. Untuk variabel diluar basis, hitung $Z_j - C_j = Wa_j - C_j$
2. Cari kolom k dimana :

   maksimasi $Z_k - C_k$ paling negatif

   minimasi $Z_k - C_k$ paling positif

   Bila tidak ada hasil optimal telah tercapai.
3. Hitung $Y_k = B^{-1}a_k$. Bila $Y_k < 0$, STOP, Solusi takterbatas.
4. Pilih basis r , sehingga $\dfrac{b_r^{'}}{Y_{rk}} = \min\{\dfrac{b_i^{'}}{Y_{ik}}, Y_{ik} > 0\}$
5. Ubah tabel sehingga Y_k menjadi basis dengan pivot pada Y_{rk} .
6. Ulangi langkah (1).

Perhatikan contoh berikut

$$\begin{aligned}
&Minimasi\ Z = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 \\
&s/t \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\
&\qquad 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\
&\qquad x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4 \\
&\qquad x_j \ge 0,\ j = 1,2,\cdots,6.
\end{aligned}$$

-1	-2	1	-1	-4	2	0	0	0
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	-1	-2	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	2	1	0	0	1

Pilih basis awal : $[a_7, a_8, a_9] = I_3$

$B = I \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = I$, maka

$W = C_B B^{-1} = [0\ 0\ 0]$ dan $b' = B^{-1}b = b$

	0	0	0	0		4
x_7	1	0	0	6		1
x_8	0	1	0	4		0
x_9	0	0	1	4		2

1. hitung $Z_j - C_j = Wa_j - C_j$, karena $W = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, maka $Wa_j = 0$
   variabel non basis 1 s/d 6

$$Z_1 - C_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - (-1) = 1$$

$$Z_2 - C_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - (-2) = 2$$

$$Z_3 - C_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - (1) = -1$$

$$Z_4 - C_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - (-1) = 1$$

$$Z_5 - C_5 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - (-4) = 4$$

$$Z_6 - C_6 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - (2) = -2$$

Yang paling maksimum (paling positif) adalah $Z_5 - C_5 = 4$, berarti masuk x_5 basis

$Y_5 = B^{-1}a_5$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Pilih baris *r,* sehingga $\frac{b_i^{'}}{Y_{ik}} \Rightarrow r = \min\{\frac{6}{1}, \frac{4}{2}\}$, baris ke 3, x_9 keluar basis.

5. Selanjutnya tingal menuah tabel di atas.

	0	0	-2	-8	2
x_7	1	0	-1/2	4	1
x_8	0	1	0	4	-1
x_5	0	0	1/2	2	0

$$Z_1 - C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = 1$$

$$Z_2 - C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-2) = 2$$

$$Z_3 - C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (1) = -3$$

$$Z_4 - C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1$$

$$Z_6 - C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (2) = -4$$

Yang paling maksimum (paling positif) adalah $Z_2 - C_2 = 2$, berarti masuk x_2 basis

$Y_2 = B^{-1}a_2$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Pilih baris *r,* sehingga $\frac{b_i^{'}}{Y_{ik}} \quad \Rightarrow r = \min\{\frac{4}{1}\}$, baris ke 1, x_7 keluar basis.

5. Selanjutnya tingal menuah tabel di atas.

	0	0	-2	-8		2
x_7	1	0	-1/2	4		1
x_8	0	1	0	4		-1
x_5	0	0	1/2	2		0

$$Z_1 - C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = 1$$

$$Z_2 - C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-2) = 2$$

$$Z_3 - C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (1) = -3$$

$$Z_4 - C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1$$

$$Z_6 - C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (2) = -4$$

Yang paling maksimum (paling positif) adalah $Z_2 - C_2 = 2$, berarti masuk x_2 basis

$$Y_2 = B^{-1}a_2$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Pilih baris *r,* sehinga $\frac{b_i^{'}}{Y_{ik}} \quad \Rightarrow r = \min\{\frac{4}{1}\}$, baris ke 1, x_7 keluar basis.

5. Selanjutnya tingal menuah tabel di atas.

	-2	0	-1	-16
x_7	1	0	-1/2	4
x_8	1	1	-1/2	8
x_5	0	0	1/2	2

$$Z_1 - C_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = -1$$

$$Z_2 - C_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-2) = 0$$

$$Z_3 - C_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (1) = -4$$

$$Z_4 - C_4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -2$$

$$Z_6 - C_6 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (2) = -5$$

Solusi sudah optimal karena $Z_j - C_j \leq 0$.

Jadi nilai optimal $Z = -16$, untuk

$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 8$ **dan** $x_9 = 0$.

Selanjutnya sebagai latihan selesaikan model pemograman linier berikut:

$$
\begin{aligned}
&Minimasi\ Z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - +5x_4 \\
&\quad s/t \quad 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\
&\qquad\quad x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14 \\
&\qquad\quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\
&\qquad\quad x_4 \quad unrestrected.
\end{aligned}
$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bătătorescu Anton, *Metode de Optimizare Liniară*, Editura Universtății din Bucureşti, 2003.

[2] Dantzig G. B., *Linear programming*, Anniversary Issue (Special), Operations Research © 2002 INFORMS

[3] Gass, Saul I., *Ilustrated Guide to Linear Programming,* New York: McGraw-Hill, 1970.

[4] Hillier, F. S. and Lieberman G. J., *Introduction to Operattions Research*, Mc Graw Hill, 7th, 2001.

[5] Nesu W., Coppins R., *Linear Programming and Extentions*, Mc.Graw-Hill, 1981.

[6] Nurhayati M.T. Mardiono, *Pemograman Linier*, Teknik Industri ITB, 1984.

[7] Kall P., Wallace S.W., *Stochastic Programming*, John Willey & Sons, 1st, 1994.

[8] Narstad John, *Linier algembra review,* http://homepage.mac.com/j-norstad/finance, Sep 2002.

[9] Ştefãnescu Anton, *Competitive Models in Game Theory and Economoc Analysis*, Editura Universtății din Bucureşti, 2000.

[10] Taha A., H, *Operations Research*, an Introduction 4th edition, Singapure, McMillan Publishing Company, 1992.

[11] Weber, J.E., *Mathematcal Analysis*, Business and Economic Apllications, Harper & Row, Publishes, New Yorrk, 4th edition, 1982.

LAMPIRAN

Beberapa penerapan Penelitian Operasional

Organization	Nature of application	Year	Related techniques	Annual Savings
IBM	Integrate a national wide of spare-parts inventories to improve service support	1990	Inventory Theory, Simulation	$20 million + $250 million less inventory
Delta Airlines	Maximize the profit from assigning airplane to over 2500 domestic flights	1994	Integer Programming	$100 million
Yellow Freight System	Optimize the design of a national trucking network and the routing of shipments	1992	Network Models, Nonlinear Programming, Forecasting, Simulation	$17.3 million
Citgo Petroleum	Optimize refinery operations and the supply, distribution, and marketing of products	1987	Linear Programming, Network Models, Forecasting	$70 million
Proctor and Gamble	Redesign the North American production and distribution system to reduce costs and improve speed to market	1997	Transportation and Assignment Problems	$200 million

Rangking Penerapan Penelitian Operasional

	Thomas and Dacosta (1977)	Forgionne (1982)
Accounting	11	5
Advertising and Sales Research	8	-
Capital Budgeting	4	2
Equipment Replacement	9	-
Forecasting – Market Planning	1	6
Inventory Control	2.5	4
Maintenance	10	9
Packaging	12	-
Personnel Management	-	10
Plant Location	6	8
Production Planning and Scheduling	2.5	3
Project Planning	-	1
Quality Control	7	7
Transportation	5	-

Rangking Penerapan Teknik Penelitian Operasional

	Turban (1969)	Ledbetter and Cox (1975)	Thomas and DaCosta (1977)	Forgionne (1982)
Bayesian Decision Analysis	-	-	9	-
Delphi	-	-	13.5	-
Dynamic Programming	6	6	10	7
Financial Methods	-	-	13.5	-
Game Theory	-	7	-	8
Heuristic Programming	8.5	-	8	-
Integer and Mixed Programming	-	-	12	-
Inventory Theory	4	-	5	-
Linear Programming	3	2	3	4
Network Models	-	4	-	-
Nonlinear Programming	7	-	7	6
PERT/CPM	5	-	4	3
Risk Analysis	-	-	11	-
Queuing Theory	8.5	5	6	5
Simulation	2	3	2	2
Statistical Analysis	1	1	1	1

Sumber: Teknik Industri ITB

Bidang-bidang kajian OROM

Topic Keywords (EURO XX 9-11 July 2007 PRAGUA)

KOMPUTER	
Adaptive Memory Programming	Grid Computing
Analytic Hierarchy Process	Decision Support Systems
Analytic Network Process	Expert Systems and Neural Networks
Anticipatory Systems	Management Information Systems
Artificial Intelligence	Software for OR/MS Analysis
Computational Biology	Simulation
Computer Science/Applications	Utility Systems
Data Envelopment Analysis	Web-based Information Systems
Data Mining	Airline Applications
Machine Learning	

OPTIMASI	
Combinatorial Optimization	Large Scale Optimization
Complex Societal Problems	Optimal Control
Complexity and Approximation	Optimization in Financial Mathematics
Continuous Optimization	Optimization Modeling
Convex Optimization	Industrial Optimization
Non-smooth Optimization	XML Standards for Optimization
Global Optimization	

PEMODELAN	
Agent Systems	Disaster and Crisis Management
Capacity Planning	Economic Modeling
Auctions / Competitive Bidding	Education and Distance Learning
Developing Countries	Energy Policy and Planning
Development	Enterprise Resource Planning Systems
Modeling Systems and Languages	Facilities Planning and Design
Stochastic Models	Warehouse Design, Planning, and Control
Strategic Planning and Managemen	Work Flow Management Systems

OPERATION RESEARCH

Critical Decision Making	Parallel Algorithms and Implementation
Cutting and Packing	Production and Inventory Systems
Decision Analysis	Profession of OR
Decision Theory and Analysis	Programming, Dynamic
Dynamical Systems	Programming, Integer
E-Commerce	Programming, Linear
Economic and Societies and Transition	Programming, Multi-Objective
Electrical Markets	Programming, Nonlinear
Environmental Management	Programming, Quadratic
Finance and Banking	OR in Agriculture
Financial Modelling	OR in Development
Flexible Manufacturing Systems	OR in Sports
Forecasting	OR/MS and the Public Sector
Forestry Management	Programming, Semi-Infinite
Fuzzy Sets and Systems	Programming, Semidefinite
Game Theory	Programming, Sequential Quadratic
Graphs and Networks	Programming, Stochastic
Group Decision Making and Negotiation	Project Management and Scheduling
Health Care	Quality Management
Human Centred Processes	Queuing Systems
Human Resources Management	Reliability
Interior Point Methods	Research and Development
International Business	Revenue Management and Pricing
International Collaboration	Reverse Logistics / Remanufacturing
Knowledge Engineering and Management	Risk Analysis and Management

Mathematical Programming	Robust Optimization
Location	Supply Chain Management
Machine Learning	Scheduling
Medical Applications	System Dynamics and Theory
Military Operations Research	Telecommunications
Multi-Criteria Decision Aids	Timetabling
Multi-Objective Decision Making	Transportation and Logistics
OR and the Internet	Variational Problems
OR for Electronic Services	