

MODEL DISTRIBUSI PADA PEMOGRAMAN STOKASTIK
DENGAN SATU FUNGSI OBJEKTIF^{*)}

SUDRADJAT^{**)}

Abstrak

Pemograman stokastik adalah pemograman matematika dimana data pada fungsi objektif dan pada kendala-kendala merupakan data ketidakpastian. Pemograman stokastik merupakan suatu metode untuk membuat keputusan optimal dibawah resiko yang memuat ketidak pastian dari beberapa atau semua parameter. Pada paper ini akan difokuskan model distribusi pada pemograman stokastik dengan satu fungsi objektif.

*) Diseminarkan pada, Workshop And National Seminar On Space Time Models and Its Applications, Department of Mathematics, Universitas Padjadjaran, Bandung – Indonesia, In Collaboration Research Between Universitas Padjadjaran and TU Delft, 2005.

***) Staf edukatif Jurusan Matematika FMIPA Unpad

yang harus diketahui dan dapat dicari kombinasi optimal dari nilai variabel keputusan x_j (faktor input, tingkat aktivitas atau aliran energi) yang memenuhi kendala.

Persamaan (1.1) disebut pemograman stokastik jika satu atau banyak dari koefisien (A, b, c) adalah variabel random.

3. MASALAH PADA DISTRIBUSI

Misalkan $A(\omega), b(\omega), c(\omega)$ matriks random yang merupakan elemen variabel random dalam ruang probabilitas $\{\Omega, K, P\}$, dimana Ω adalah borelian, K adalah himpunan bagian dari Ω dan P adalah probabilitas.

Diberikan

$$D = \{x \mid A(\omega)x \leq b(\omega), x \geq 0\}, \omega \in \Omega \quad (3.1)$$

dimana $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ adalah satu vektor kolom yang tidak diketahui. Selanjutnya ditulis $D(A, b)$ dimana A dan b tidak selalu variabel random.

$$Z(A(\omega), b(\omega), c(\omega)) = \max_{x \in D(\omega)} (\min) c'(\omega)x, \quad (3.2)$$

selanjutnya $Z(A(\omega), b(\omega), c(\omega))$ dinotasikan dengan $Z(\omega)$.

Jika persamaan (3.2) merupakan variabel random, maka persamaan (3.1)-(3.2) nilai optimal.

Lema 1. $D(A^+, b^-) \subseteq D(A, b) \subseteq D(A^-, b^+)$; $A^- \leq A \leq A^+, b \leq b \leq b^+$.

Ambil $x \in D(A, b)$ sehingga

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Kemudian kita dapatkan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j \leq a_{ij} x_j \leq b_i \leq b_i^+, \quad i = \overline{1, m}.$$

Dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk solusi ekstrem dari $x \in D(A^-, b^+)$.

Lema 2. $Z(A^-, b^+, c^-) \leq Z(A, b, c) \leq Z(A^+, b^-, c^+)$; $c^- \leq c \leq c^+$, yang sama

$$Z(A^-, b^+, c^-) = \min_{x \in D(A^-, b^+)} c^- x; \quad Z(A^+, b^-, c^+) = \min_{x \in D(A, b)} c^+ x.$$

Pada kasus dimana (3.1) dan (3.2) mempunyai nilai optimal, $Z(\omega)$ adalah suatu variabel random yang didefinisikan pada ruang probabilitas $\{\Omega_0, K_0, P_0\}$ [14], dimana $\Omega_0 = \{\omega \mid D(\omega) \neq \emptyset\}$, $K_0 = K \cap \Omega_0$ dan P_0 adalah probabilitas dari P pada K_0 dengan

$$\text{kata lain } P_0(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega_0)}, \quad A \in K_0.$$

Teorema berikut adalah syarat perlu dan cukup dari nilai optimal pada stokastik linier.

Teorema 3.1 (B. Beareanu [1]) *Pemograman stokastik linier* (3.1) dan (3.2) mempunyai nilai optimal jika dan hanya jika implikasi berikut ada pada Ω (dengan probabilitas 1)

$$A(\omega)x \leq 0, x \geq 0 \Rightarrow c(\omega)x \leq 0, \quad (3.3)$$

$$yA(\omega) \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow yb(\omega)x \geq 0 \quad (3.4).$$

Teorema 3.2 (Stancu I. M. Minasian [15]). Nilai optimal dari $Z(\omega)$ adalah variabel random $Z : \Omega \rightarrow R \cup \{-\infty, \infty\}$ jika kita berikan $Z(\omega) = +\infty$, pada saat $D(\omega_0)$ adalah terbatas, $Z(\omega) = -\infty$ dimana $Z(\omega_0)$ adalah terbatas.

Teorema 3.3 (Stancu I. M. Minasian [15]). Fungsi distribusi $F(z)$ suatu variabel random

$$f(\omega) = \min\{(c'+t(\omega)d'x|Ax = b, x \geq 0)\}$$

adalah

$$F(z) = \sum_{s=1}^p H_s(z), \text{ dimana } u(z) = \frac{z - c'x^s}{d'x^s}$$

dan

$$H_s(z) = \begin{cases} T(\lambda_s) - T(\lambda_{s-1}) & \text{jika } \begin{cases} d'x^s > 0 \text{ dan } u_s(z) \geq \lambda_s, \\ d'x^s < 0 \text{ dan } u_s(z) \leq \lambda_{s-1}, \\ d'x^s = 0 \text{ dan } c'x^s < z \end{cases} \\ \begin{cases} T(u_s(z)) - T(\lambda_{s-1}) \\ T(\lambda_s) - T(u_s(z)) \end{cases} & \text{jika } \lambda_{s-1} < u_s(z) < \lambda_s \text{ dan } \begin{cases} dx^s > 0 \\ dx^s < 0 \end{cases} \\ 0 & \text{jika } \begin{cases} d'x^s > 0 \text{ dan } u_s(z) \leq \lambda_{s-1}, \\ d'x^s < 0 \text{ dan } u_s(z) > \lambda_s, \\ d'x^s = 0 \text{ dan } cx^s \geq z. \end{cases} \end{cases}$$

4. ILUSTRASI

Tentukan fungsi distribusi optimum dari problem pemrograman stokastik dibawah ini:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$Z(A, b, c) = maks(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$$

jika A, b, c adalah variabel random diskrit independen dengan distribusi dibawah ini:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left(A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} b_1 = (1, -5, 3), & b_2 = (7, 6, 4) \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_1 = (1, 3, 4), & c_2 = (2, -3, 1) & c_3 = (1, 3, -4) \\ 0,4 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Tiga pasangan (A, b, c) menghasilkan 12 nilai. Solusi dari problem pemrograman deterministik seperti terlihat pada tabel 4.1. Probabilitas nilai optimum dihitung seperti berikut:

$$P(Z(A,b,c) = 7,16) = P(A = A_1, b_1 = b_1, c = c_1)$$

$$P(A = A_1)P(b = b_1)P(c = c_1) = (0,2)(0,4)(0,2) = 0,016$$

Tabel 4.1

No	(A,b,c)	Solusi optimal	$Z(A,b,c)$	Banyak Iterasi	Proabilitas yang memuat $Z(A,b,c)$
1	(A,b,c)	$x_1 = 0,29; x_2 = 0,57; x_3 = 1,29$	7,16	4	0,016
2	(A,b,c)	$x_1 = 0,29; x_2 = 0,57; x_3 = 1,29$	1	3	0,04
3	(A,b,c)	$x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = 0$	5	3	0,024
4	(A,b,c)	$x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = 3$	9	3	0,064
5	(A,b,c)	$x_1 = 0,46; x_2 = 0; x_3 = 0,38$	1,3	3	0,16
6	(A,b,c)	$x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = 0$	9	2	0,096
7	(A,b,c)	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1$	7	3	0,096
8	(A,b,c)	$x_1 = 0,12; x_2 = 0; x_3 = 0,18$	1,42	3	0,24
9	(A,b,c)	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1$	-1	3	0,144
10	(A,b,c)	$x_1 = 3,94; x_2 = 1,3; x_3 = 0,11$	8,28	4	0,024
11	(A,b,c)	$x_1 = 4,08; x_2 = 1,33; x_3 = 0$	4,17	5	0,06
12	(A,b,c)	$x_1 = 4,08; x_2 = 1,33; x_3 = 0$	8,07	4	0,036

Distribusi dari $Z(A,b,c)$ adalah:

$$Z(A,b,c) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1,3 & 1,42 & 4,17 & 5 & 7 & 7,16 & 8,07 & 8,28 & 9 \\ 0,144 & 0,04 & 0,16 & 0,24 & 0,06 & 0,024 & 0,096 & 0,016 & 0,036 & 0,024 & 0,16 \end{pmatrix}$$

Fungsi distribusi nilai optimal sebagai berikut:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{jika } a \leq -1 \\ 0,144 & \text{jika } -1 < a \leq 1 \\ 0,184 & \text{jika } 1 < a \leq 1,3 \\ 0,344 & \text{jika } 1,3 < a \leq 1,42 \\ 0,584 & \text{jika } 1,42 < a \leq 4,17 \\ 0,644 & \text{jika } 4,17 < a \leq 5 \\ 0,668 & \text{jika } 5 < a \leq 7 \\ 0,764 & \text{jika } 7 < a \leq 7,16 \\ 0,78 & \text{jika } 7,16 < a \leq 8,07 \\ 0,816 & \text{jika } 8,07 < a \leq 8,28 \\ 0,840 & \text{jika } 8,28 < a \leq 9 \\ 1 & \text{jika } a > 9 \end{cases}$$

Dapat di evaluasi untuk kasus ini

$$P(Z(A,b,c) = -\infty) = P(Z(A,b,c) = +\infty) = 0.$$

Untuk kasus yang besar memerlukan banyak iterasi metoda ini tidak dapat digunakan untuk menentukan fungsi distribusi optimum. Untuk mengatasi hal tersebut diantaranya bisa digunakan metode simulasi.

Daftar Pustaka

- [1] Bereanu, B., On stochastic linear programming, I: Distribution problem. A single random variable, rev. Roumaine de Math. Pure et appl. 8, 683-697, 1963.
- [3] Ben Abdelaziz, F., Lang, P., and Nadeau, R., *Distribution efficiency in multi-objective programming*, *Journal Operational Research*, Vol. 85, pp. 399-415, 1995.
- [3] Bertsekas, D. and Tsitsiklis, J., *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific, Belmont, MA., 1996.
- [4] Birge, J.R., *Decomposition and partitioning methods for multi-stage stochastic linear programs*," *Operations Research*, 33, pp. 989-1007, 1985.
- [5] Birge, J.R. *Stochastic Programming Computation and Applications*," *INFORMS J. on Computing*, 9, pp. 111-133. 1997.
- [6] Birge, J.R. and Louveaux, F.V., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York, 1997.
- [7] Caballero, R., Cerda, E., Munoz, M. M., Rey, L., I. M. Stancu Minasian, *Efficient solution concepts and Their relations in stochastic multi-objective programming*, *JOTA*, Vol. 110, No. 1, pp. 53-74, July 2001.
- [8] Caballero, R., Cerda, E., Munoz, M. M., and Rey, L., *Relations among several efficiency concepts in stochastic multi-objective programming*, *Research and Practice in Multi-criteria decision making*, edited by Y. Y. Haimes and R. Steuer, Lecture Notes in Economics and Mathematical System, Springer Verlag, Berlin, Germany, Vol. 484, pp. 57-68, 2000.
- [9] Dantzig, G.B., *Linear programming under uncertainty*," *Management Science*, 1, pp. 197-206, 1955.
- [10] Ewbank, J.B., Foote, B.L., Kumin, H. J., *A method for the solution of distribution problem of stochastic linear programming*, *SIAM J. Appl. Math.* 26, 225-238, 1974.
- [11] Kall, P. and Wallace S.W., *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons, Chichester, England 1994.
- [12] Kall, P. and Mayer J., *SLP-IOR: an interactive model management system for stochastic linear programs*," *Mathematical Programming, Series B*, 75, 221-240, 1996.
- [13] Li-Yong YU Xiao-Dong JI Shou-Yang WANG2 , *Stochastic Programming Models in Financial Optimization: A Survey*, Institute of Systems Science Academy of Mathematics and Systems Sciences Chinese Academy of sciences, Beijing 100080, People's Republic of China, .
- [14] Onicescu, O., Iosifescu, M., Cîteva considerații asupra programării liniare stocastice, *St. Cercetări de calcul Economic și Cibernetică*, 6, 69-72, 1967.
- [15] Stancu Minasian, I. M., *Programarea Stocastică cu mai multe Funcții obiectiv*, Editura Academici, București, 1980.

-----su^o-----