MODEL JALAN LALULINTAS JALAN TOL DALAM PERSAMAAN DIFERENDIAL PARSIAL

Sudradjat, Tony Sumartono, Asropi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
Jalan Raya Jatinagor Sumedang Fax 022-7794696
E-mail adjat@melsa.net.id

ABSTRAK
Dalam memodelkan suatu sistem, diperlukan simplifikasi dan abstraksi dari sistem nyata menjadi sistem sederhana (model). Model lalulintas jalan tol adalah hasil penyerdahanaan (simplifikasi) dari variable-variabel yang mempengaruhi sistem lalulintas yang kemudian ditulis sebagai model matematis.

Validasi suatu model terlihat ketika model diterapkan pada keadaan sesungguhnya. Model yang kurang baik akan menghasilkan tingkat kesalahan yang tinggi. Dengan model inilah dapat digambarkan dan diprediksi perilaku atau kejadian yang akan datang.

Kata kunci : Model lalu lintas, transportasi, kecepatan kendaraan, kepadatan jalan, arus lalu lintas

THE HIGHWAY TRAFFIC MODEL IN DIFFERENTIAL PARTIAL EQUATIONS

ABSTRACT
In modeling, we simplification and abstraction from the real system to the simple system (namely model). The highway traffic model is simplification of complex variable that interfere the traffic system, which is written as a mathematic models.

The models validities is know by these implementation for the real system. An unappropriate model will give the hight error. Someone can descript and predict the next events

Keyword : Traffic model, transportation, vehicle velocity, traffic density,traffic flow

Pendahuluan

Ilmu pengatahuan Alam (*science*) dan keteknikan (*engineering*) telah berkembang sedemikian pesat secara parallel dan komplementer. Dengan sains dan keteknikan yang semakin berkembang inilah, manusia telah membuat perubahan-perubahan bagi peradaban. Alfin Tofler, furutolog Amerika Serikat, membagi perkembangan peradaban manusia dalam tiga gelombang (*the three waves*), yaitu pertanian, industri , dan informasi.

Gelombang industri, menurut Tadeo Umesao dari Kyoto University, terbagi tiga katagori agricultural, material, dan spiritual (Rahmat, Djalaludin 1996). Jika diibaratkan sebagai organisme biologis, menurut Umesao, Industri agricultural sebagai pemenuhan fungsi degesif, industri material sebagai pemenuhan kebutuhan fungsi lokomotif, bergerak, menngkap, dan menghasilkan sekaligus memperluas lingkungan. Pada zaman industri material inilah terjadi produksi masa dan konsumsi masa untuk material dan

energi serta mulai dikembangkannya sistem transportasi.

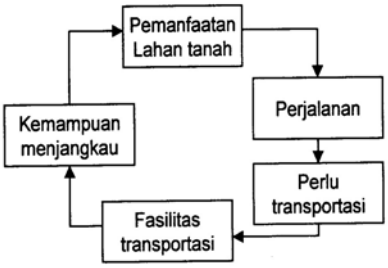
Transportasi merupakan bagian dari mekanisme masyarakat sejalan dengan meningkatnya kebutuhan mobilitas masyarakat. Tingkat mobilitas masyarakat ini akan memberikan pengaruh terhadap karakter masyarakat dan tingkat produktivitasnya. Sehingga dapat dikatakan bahwa transportasi merupakan bagian integral dari sistem kemasyarakatan (Morlock 1978)

Transportasi menurut fasilitas dan wilayah operasinya dibedakan menjadi empat macam : yaitu transportasi darat, transportasi laut (air), transportasi udara, dan transportasi pipa (*pipe line*). Aktifitas transportasi darat dengan fasilitas jalan dan kendaraan lazim disebut lalulintas jalan, dan masalah yang umum dari lalulintas jalan adalah kecelakaan dan kemacetan.

Kemacetan lalulintas biasanya meningkat sesuai dengan meningkatnya mobilitas manusia pengguna transportasi, terutama pada saat-saat sibuk. Kemacetan lalulintas terjadi karena berbagai sebab diantaranya disebabkan oleh kelemahan sistem pegaturan lampu lalulintas, banyaknya persimpangan jalan, banyaknya kendaraan yang turun ke jalan, musim, kondisi jalan, dan lain-lain. Berbagai usaha untuk menanggulangi kemacetan lalulintas yang dilakukan adalah dengan penambahan sarana jalan, pembangunan jalan tol, jalan layang, terowongan, sistem pengaturan lampu ATCS (*Area Traffic Control System*), dan lain-lain.

Lalulintas Jalan

Transportasi sangat erat kaitannya dengan perluasan lahan tanah. Drewe, menggambarkan hubungan antara perkembangan transportasi dengan perluasan lahan tanah digambarkan seperti pada gambar 1



Gb. 1 Diagram siklus perluasan lahan dan ransportasi

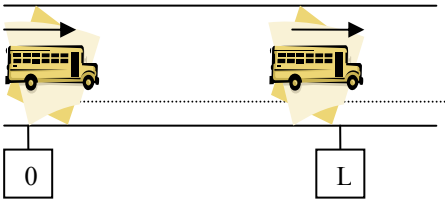
Lalulintas jalan dipengaruhi oleh banyak variabel, tetapi secara garis besar dalam tulisan ini dibatasi pada tiga variable, yaitu kecepatan dan medan kecepatan, kepadatan, dan arus.

1. Kecepatan dan medan kecepatan

Kecepatan adalah jarak tempuh yang dicapai dibagi dengan waktu tempuh, secara matematis ditulis :

$$\text{Kecepatan (v)} = \frac{dx}{dt}$$

Medan kecepatan adalah kecepatan sebuah mobil disuatu titik (jalan) pada saat t, ditulis v(s,t) atau v[xi(t),t] = vi(t) Misalkan dua buah mobil (1 dan 2) di jalan raya seperti pada gambar 1. Mobil 1 bergerak dengan kecepatan 45 mil/jam dan mobil 2 bergerak dengan kecepatan 30 mil/jam.



Ganbar 2 Dua buah mobil berjarak L mil di jalan

Misalkan mobil 1 berada di x = L >0, pada saat t =0, dan mobil 2 di x = 0 pada saat t = 0

Sehingga $\frac{dx_1}{dt} = 45, t > 0, x_1(0) = L$,

dan $\frac{dx_2}{dt} = 30, t > 0, x_2(0) = 0$

Integrasi dari persamaan ini menghasilkan :

$$x_1 = 45t + L, x_2 == 30t =$$

Suatu model sederhana, misalkan mobil α bergerak dengan kecepatan 30 + 15 α, dengan $0 \le \alpha \le 1$. Maka kecepatan mobil berubah secara kontinu dari 30 mil/jam sampai dengan 45 mil/jam. Integrasi persamaan $\frac{dx}{dt} = 30 + 15\alpha$, menghasilkan x = (30+15α)t + c. Misalkan c = αL, maka kita dapatkan v = 30 + 15α dan x= 30t + 15αt + αL. Eleminasi α dari kedua persamaan ini menghasilkan sebuah medan kecapatan

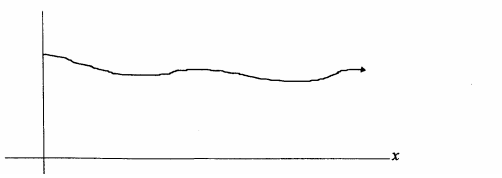
$$v(x,t) = \frac{15x + 30L}{15t + L}, t > 0, x > 0$$

2. Kepadatan lalu lintas (ρ)

Kepadatan (ρ) = jumlah mobil tiap panjang jalan. Jika diasumsikan panjang setiap mobil dan jarak antara mobil adalah sama. Misalkan panjang masing-masing mobil adalah L m, dengan jarak antara mobil d m. Maka jumlah tiap kilometer panjang jalan adalah

$$\rho = \frac{1}{L + d}$$

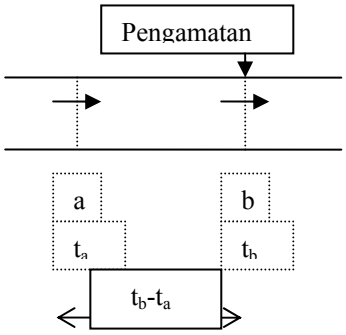
Pengamatan kepadatan dilakukan dengan pendataan jumlah mobil tiap interval (jarak) tertentu. Penentuan interval hendaknya dilakukan tidak terlalu pendek atau panjang (+ 0,4km)



Gb. 3 Grafik fluktuasi pada interval panjang (+ 5 mil) cenderung datar

3. Arus Lalu lintas (q)

Data tentang arus lalu lintas dapat diperoleh dengan pengamatan terhadap jumlah mobil yang lewat tiap interval waktu.



Gambar 4 Arus lalu lintas

Penentuan panjang pendeknya interval (waktu maupun jarak), harus memperhatikan hal-hal berikut :
Cukup panjang, sehingga terdapat mobil pada interval pengukuran (fluktuasi tidak terlalu tajam);
Cukum pendek, sehingga variasi kepadatan maupun arus akan terlihat

Karena ρ adalah jumlah mobil tiap panjang jalan, sedangkan jarak yang ditempuh adalah v.t, maka jumlah mobil yang melewati pengamatan dalam waktu t jam adalah ρ.v.t.
Jadi arus (q) = kepadatan ((ρ) x kecepatan (v)

$$q(q,t) = \rho(x,t)\ v(x,t)$$

Arus terbesar terjadi pada saat kepadatan maksimal dan bergerak dengan kecepatan maksimal. Tetapi hal ini tidak mungkin, sebab pada saat lalu

lintas padat biasanya mobil susah bergerak bahkan berhenti sama sekali.

Model lalu lintas jalan Tol

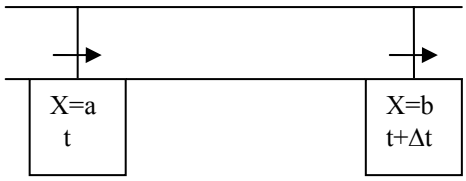
1. Kekekalan jumlah mobil

Perhatikan variable kepadatan ρ (x,t) dan medan kecepatan v(x,t). Arus lalu lintas dapat kita hitung q(q,t) = ρ (x,t) v(x,t) dan gerakan masing-masing mobil memenuhi persamaan :

$$v(x,t) = \frac{dx}{dt}, dengan x(0) = x_0 \quad ...(1)$$

Penyelesaian persamaan (1) akan menentukan posisi masing-masing mobil pada waktu tertentu, sehingga dapat dihitung kepadatan pada waktu yang bersangkutan. Jadi untuk menentukan kepadatan pada suatu saat perlu diketahui lebih dahulu kepadatan dan kecepatan awalnya.

Misalkan pada sepenggal jalan antara x=a dan x=b seperti pada gambar 5



Gb. 5 Mobil masuk dan meninggalkan jalan

$$N = \int_a^b \rho(x,t)\, dt \quad ...(2)$$

Perubahan jumlah mobil antara t dan t + Δt dapat ditulis ;

t → t + Δt
N(t) → N(t + Δt)

N(t + Δt) - N(t) ≈ Δt([q(a,t) – q(b,t)] ;
Karena q(a,t) adalah jumlah mobil tiap waktu, maka jumlah mobil yang lewat a, antara t = to sampai t = t_1 adalah

$\int_{t_o}^{t_1} q(a,t)dt$ Sehingga perubahan jumlah mobil antara t = to dan t = t1 atau N(t1)-N(to) adalah

$$N(t_1)\text{-}N(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \{ q(a,t) - q(b,t\} dt \quad ...(3)$$

Karena t_0 tidak tergantung pada t_1, kita dapat tulis dalam bentuk derevatif pada t_1 atau t_0. Persamaan derevatif pada t_1 adalah :

$$\frac{dN(t_1)}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\int_{t_2}^{t_1} \{ q(a,t) - q(b,t)\} dt,$$

$$\frac{dN(t_1)}{dt_1} = q(a,t1) - q(b,t1) \quad ...(4)$$

Karena t_1 dapat dipilih secara bebas maka t_1 dapat diganti dengan t. Sehingga kombinasi persaman (1) dan (4) diperoleh ;

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\, dt = q(a,t) - q(b,t) \quad ..(5)$$

Persamaan (5) disebut hukum kekekalan integral
Jika pada saat jumlah mobil tetap

q(a,t) = q(b,t) atau $\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\, dt = 0$

Untuk panjang jalan tak terhingga, x mendekati $\pm\infty$, arus lalu lintas mendekati nol $\lim_{x\to\pm\infty} q(x,t) = 0$.

Persamaan (5) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)\, dx = 0$$

Akibatnya $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)\, dx$ = konsatan (jumlah mobil konstan). Nilai mobil konstan ini dapat diketahu jika jumlah mobil mula-mula atau kepadatan mula-mula diketahui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(x,t)\,dx = No = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(x,0)\,dx$$

Anggap q(x,t) , ρ (x,t), dan v(x,t) adalah fungsi kontinu pada x dan t Diferensial total terhadap t dalam [a,b] pada persamaan 5 adalah:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a}^{b} \rho\,(x,t)dx = q(a,t)-q(b,t) \quad ...(6)$$

1. Hubungan kecepatan dengan kepadatan

Kepadatan lalu lintas dan kecepatan arus lalulintas dihubungkan dengan persamaan kekekalan jumlah mobil,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho, v)}{\partial x} = 0 \quad ...7$$

Persamaan (7) dapat digunakan untuk meramalkan kepadatan lalu lintas, jika kecepatan awalnya diketahui. Untuk menentukan medan kecepatan, anggap mobil-mobil itu sebagai partikel yang mengalir, dengan pengertian semakin banyak mobil-mobil yang turun kejalan, maka semakin lambat laju mobil-mobil tersebut. Dalam hal ini salah satu cara untuk meneliti medan kecepatan adalah dengan melihat hasil eksperimen penentuan respon individu mobil terhadap stimulus lalu lintas. Kita lakukan penyederhanaan dengan menganggap bahwa kecepatan mobil hanya tergantung kepada kecepatan lalu lintas saja; $v = v(\rho)$.

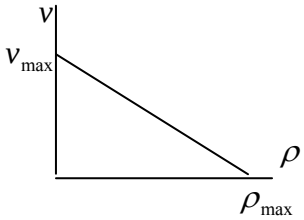
Jika tidak terdapat mobil di jalan raya (kepadatan sangat kecil), maka mobil akan bergerak dengan maksimum, v_{max}

2. **Kecepatan maksimum (v_{max})**

Kecepatan yang mampu dicapai saat mobil bebas dari interaksinya dengan mobil-mobil lain.Semakin meningkat kepadatan lalu lintas, kecepatan gerak mobil semakin lambat, artinya

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} \equiv v'(\rho) \le 0$$

Saat kepadatan maksimum, kecepatan minimum, atau sering diistilahkan dengan lalu lintas dari bemper ke bemper, $v'(\rho_{max})$. Secara grafis, hubungan antara kecepatan dengan kepadatan, dapat dilihat pada berikut :



Gambar 6. Kecepatan berbanding terbalik dengan kepadatan

Model lalu lintas standar

1. Model lalu lintas stabil yang sederhana

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = -\lambda\left\{\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt}\right\} \quad ...7$$

Asumsi-asumsi dasar yang perlu diperhatikan pada model standar, mobil-mobil tidak saling mendahului, dimana $x_n(t)$ adalah mobil ke n di jalan. Gerak masing-masing mobil hanya tergantung pada kepadatan lalu lintas yang ada.

Dari persamaan (7) dapat diambil beberapa pengertian :

- Jika sebuah mobil bergerak lebih cepat dari mobil yang ada di depannya, maka pada saat mendekati mobil tersebut akan melakukan perlambatan, dan sebaliknya;
- Semakin besar kecepatan relative suatu mobil, maka semakin besar percepatan mobil yang ada dibelakangnya, dan sebaliknya;

- λ adalah kecepatan dua buah mobil yang saling beriringan.

Selanjutnya akan dikaji "*waktu reaksi*" yang akan dilakukan oleh seorang pengemudi untuk menyesuaikan diri dengan kecepatan relative. Misalkan waktu reaksi tersebut T, seperti pada persamaan (7) dan integrasi nya menghasilkan :

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = -\lambda\left[x_n(t) - x_{n-1}(t)\right] + d_n \qquad \ldots 8$$

Persamaan (8) ini menunjukan hubungan antara kecepatan dengan jarak antara mobil pada waktu berikutnya, (t+T). Misalkan jarak antara mobil adalah konstan, maka masing-masing mobil akan bergerak dengan kecapatan yang sama atau seragam, sehingga :

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = \frac{dx_n(t)}{dt}$$

Misalkan , $d_n = 0$, maka persamaan (8) menjadi :

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = -\lambda\left[x_n(t) - x_{n-1}(t)\right] + c_o,$$

karena $x_{n-1} - x_n = \frac{1}{\rho}$,

dari definisi kepadatan lalu lintas, maka model iringan mobil membentuk persamaan yang menunjukkan hubungan antara kecepatan dengan kepadatan, yaitu :

$$v = \frac{\lambda}{\rho} + c_0$$

dengan c suatu konstanta. Sehingga kepadatan maksimum pada v = 0,

$$0 = \frac{\lambda}{\rho_{\max}} + c_0, atau \frac{\lambda}{\rho_{\max}} = -c_0$$

sehingga hubungan kecepatan dengan kepadatan menjadi :

$$v = \lambda\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)$$

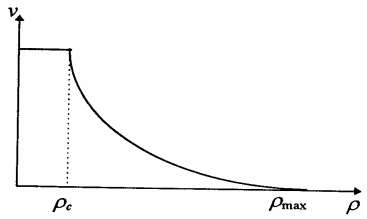
Model ini tidak tepat untuk kepadatan yang sangat kecil, ρ→ 0, karena kecepatan mobil tidak mungkin terus meningkat sampai melebihi kecepatan maksimum. Jadi model lengkap tentang hubungan antara kepadatan dengan kecepatan adalah sebagai berikut :

$$v = \begin{cases} v_{\max} \rightarrow \rho > \rho_c \\ \lambda\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right) \rightarrow \rho > \rho_c \end{cases} \qquad \ldots(9)$$

arus lalu lintas dalam hal ini berbentuk

$$q = \begin{cases} v_{\max} \rightarrow \rho < \rho_c \\ \lambda\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \rightarrow \rho > \rho_c \end{cases}$$

Jadi v berupa grafik fungsi kontinu dan dapat digambarkan sebagai berikut :



Gb.7 Kurva batas kecepatan dari hubungan kepadatan-kecepatan iringan mobil

2. Gelombang arus lalu lintas

Kepadatan cukup berat terjadi ketika kepadatan lalu lintas melebihi kepadatan optimal, dan lalu lintas lengang terjadi sebaliknya, yaitu pada saat kepadatan dibawah kepadatan optimal.

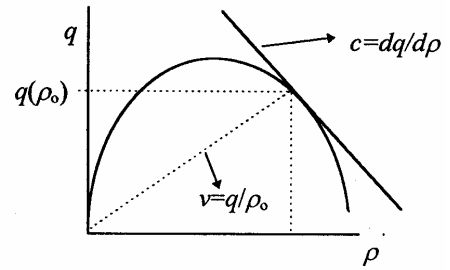
Model arus lalu lintas dengan kepadatan sebagai variable bebas :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v(\rho\right] = 0, \text{ atau}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

Misalkan kepadatan awal $\rho(x,0) = \rho_0$ dan $\frac{dq}{d\rho}(\rho_0) = c$, maka persamaan gelombang kepadatan lalu lintas dapat ditulis dalam bentuk persamaan :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$



Gb. 8 Gelombang kepadatan dengan kece patan tetap c dan kecepatan mobil v

Kesimpulan

Transportasi merupakan bagian dari mekanisme masyarakat sejalan dengan meningkatnya kebutuhan mobilitas masyarakat.
Transportasi merupakan bagian integral dari sistem masyarakat yang akan meningkatkan tingkat mobilitas masyarakat dan ini akan memberikan pengaruh terhadap karakter masyarakat dan tingkat produktivitasnya.

Lalu lintas jalan sangat erat kaitannya dengan perluasan lahan tanah dan variable-variabel yang mempengaruhi, diantaranya yaitu kecepatan dan medan kecepatan, kepadatan, dan arus

Pemodelan lalu lintas jalan tol selain memperhatikan variabel-variabel kecepatan dan medan kecepatan, kepadatan dan arus juga perlu memperhatikan arus masuk dan keluar dari tiap-tiap percabangan, seperti pada model :
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = g$, dimana g sebagai petunjuk adanya pengaruh penambahan/pengurangan jumlah mobil

Untuk mencari solusi dari model lulu lintas jatan tol ini terlebih dahulu perlu diberikan terlebih dahulu nilai awal kecepatan dan kepadatnya.

Daftar Pustaka

Asripi (1997), Tinjauan Lalu Lintas Jalan Tol Dalam Persamaan Diferensial Partial, Skripsi S1, Jurusan Matematika FMIPA UNPAD

Cresswell,Roy (1977). *Passenger Transportation*, London, International Text Book Company. LTD.

Giordano Frank. R, Weir Maurice D (1988), Differentian Equation, A Modeling Approach, Addition-Wesley Publishing Company

Haberman, Richard (1977), Matemathical Models, Englewood Chliffs, New Jersey Prentice Hall, Inc

Hobbs FD. (1979), Traffic Planing and engineering, 2nd Edition, Inggris, Pergamon Press

Michalopoulos, Panos G. and Lyrinzis, Anastasion S., (Agustus 1993), Continum Modeling of Traffic Dynamics for Congestied Freeway, Transfortation Research (B) vol 27 B No. 04, New York, Pergamon Press

Morlock and Edward K. (1978) Introduction to Transportation Engineering and Planing, Tokyo, Kogakusta, LTD.

Hardiyanti S. R. (1997) Manajemen Korporasi dalam Bidang Infra struktur, Sebuah tinjauan mengenai pengalaman pengelolaan Sumber Daya Pada Kelompok citra (Jalan Tol/Layang), Studium Generale Program Pasca Sarjana UNPAD

Sudradjat (1995) Analisis Perangcangan Sistem, Bandung, Teknik Industri, Fakultas Teknik Unjani