# PENYELESAIAN OPTIMISASI PORTOFOLIO DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN LINIER FUZZY *)

SUDRADJAT and Edi Kurniadi **)


## Abstraks

Para investor menyadari investasi yang dilakukan untuk mendapatkan *return* mengandung konsekuensi resiko. Mereka secara pasti sebenarnya tidak tahu seberapa besar hasil yang akan diperoleh dari investasi yang dilakukan. Namun demikian para investor dapat memperkirakan berapa keuntungan yang diharapkan dan seberapa besar kemungkinan hasil yang sebenarnya nanti akan menyimpang dari yang diharapkan.

Upaya melakukan diversifikasi dapat diwujudkan dengan cara mengkombinasikan berbagai pilihan saham dalam investasinya.

Melalui portofolio saham para investor berusaha memaksimumkan keuntungan yang diharapkan dari investasi dengan tingkat resiko tertentu atau berusaha meminimumkan resiko untuk sasaran tingkat keuntungan tertentu.

Permasalahannya jenis saham apa yang akan dipilih dalam portofolionya, dan para investor cenderung memilih portofolio yang optimal, yaitu yang sesuai dengan preferensinya terhadap keuntungan serta resiko yang ditanggung.


---

*) Disampaikan pada Konferensi Nasional Matematika XIV & Kongres Himpunan Matematika Indonesia, Palembang, 24-27 Juli 2008

**) Staf edikatif Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran Bandung, E-mail: adjat03@yahoo.com

Pada analisis keuangan dikenal dua macam model analisis optimasi portofolio yaitu *stochastic dominance* dan *single index model.*
Pada paper ini, dikembangkan model optimisasi portofolio dengan pembatas *stochastic dominance*, kemudian model ini diselesaikan dengan menggunakan pemograman linier *fuzzy* lebih khusus lagi dengan menggunakan *linear membership function*.

**Key words.** Stochastic dominance, portfolio, kondisi optimasi, pemrograman linier *fuzzy*, bilangan *fuzzy*.
**AMS subject classifications.** Primary, 90C15, 90C29, 90C46, 90C48, 90C70; Secondary, 46N10, 60E15, 91B06

## 1. Pendahuluan

Masalah optimisasi portofolio pada suatu asset terbatas adalah masalah klasik dalam teori dan perhitungan financial. Sejak Markowitz, 1952 [7,9] pertama kali mengemukakan bahwa penampilan portofolio seharusnya diukur dalam *distinct* dua dimensi, yaitu rata-rata yang menggambarkan ekspektasi return, dan resiko yang mengukur ketidak pastian return. Salah satu pendekatan teori terhadap masalah portofolio seleksi adalah stokastik *dominance* [16,8].

Dalam kontek pada pemilihan optimisasi portofolio bahwa target return diatas kenaikan (rate) resiko bebas untuk pasar tertentu dimana pada waktu yang sama dapat menjamin mencapaian kenaikan return minimum, teori keputusan fuzzy menyediakan framework analisis yang sangat baik. Karena permasalahan alami membutuhkan sesuatu untuk memeriksa berbagai macam scenario pasar dan setiap sekenario pasar akan munculkan dalam fungsi tujuan.

Pada paper ini akan dibahas sebagai berikut, bagian 2 deskripsi tentang formulasi masalah portofolio seleksi. Bagian 3, uraian tentang masalah portofolio technologi koefisien fuzzy. Bagian 4, diberikan tentang penyelesaian masalah fuzzifikasi.

## 2. Masalah portfolio

Proses portofolio seleksi dibagi dalam dua stage. Stage pertama mulai dengan observasi dan pengalaman dan diakhir dengan kenykinan ferformasi masa. Stage kedua mulai dengan kenyakinan yang relevan tentang performansi masa depan dan berakhir dengan memilih portofolio [7].
Asumsi dasar masalah standar fortofolio seleksi adalah sebagai berikut:
(a) n securities,
(b) an initial sum of money to be invested,
(c) the beginning of a holding period,
(d) the end of the holding period,

dan tentukan $x_1, \cdots, x_n$ sebagai bobot proporsi dari yang diinvestasikan inivestor. Ini adalah proporsi dari inisial jumlah yang diinvestasikan dalam dalam n securitis di awal dari *holding* periode yang menjelaskan portfolio untuk dipastikan sampai akhir dari holding periode. *Standar view* adalah hanya ada satu tujuan di seleksi portfolio dan untuk memaksimalkan portfolio return, prosentase return didapat dari portfolio holding periode.

Tentukan $R_1,...,R_n$ adalah radom returns dari assets $\overline{1,n}$. Asumsikan bahwa $[|R_j|]<\infty$ untuk semua $j=\overline{1,n}$. Notasikan $x_1,...,x_n$ pembagian modal investasi dari asset $\overline{1,n}$ , maka model total return dapat dituliskan:

$$R(x)=R_1x_1+...+R_nx_n \qquad 2.1$$

Himpunan alokasi asset yang mungkin dapat dirumuskan:

$$X=\left\{x\in \mathrm{R}^n : x_1+...+x_n=1, x_j\geq 0, j=1,...,n\right\}$$

Rata return

$$\mu(x)=\mathrm{E}[R(x)].$$

Varians return,

$$\rho(x)=\mathrm{V}ar[R(x)],$$

Rata-rata resiko:

$$\begin{aligned}&\max_{x\in X}\mu(x)-\lambda\rho(x)\\ &s/t \qquad x\in X.\end{aligned} \qquad 2.2$$

Dimana, $\lambda$ adalah parameter nonnegative yang merepresentasikan perubahan rate dari rata-rata resiko. Jika $\lambda=0$, tidak mempunyai nilai resiko dan masalah direduksi menjadi maksimasi rata-rata. Jika $\lambda>0$ perhatikan diantara rata-rata dengan dan resiko.
Pendekatan lainnya adalah dengan memilih fungsi utiliti $u:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ dan masalah optimisasinya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\max_{x\in X}\mathrm{E}[u(R(x))]. \qquad 2.3$$

Pada umumnya fungsi $u(\cdot)$ adalah concave dan tidak naik, jadi representasi preferensi dari a risk-averse decision maker.
Dalam pendekatan stokastik *dominance* , random returns dibandingkan dengan cara point-wise dari beberapa bentuk fungsi yang dibentuk dari distribusi fungsi. Untuk real random variable *V*, bentuk fungsi pertama didefinisikan sebangai kontinu kanan distribusi fungsi kualitatif dari *V* :

$$F(V;\eta)=\mathrm{P}(V\leq\eta) \text{ untuk } \eta\in\mathrm{R}.$$

Random return *V*, dikatakan stokastik dominance orde pertama terhadap random return $S$ , dinotasikan $V\succeq_{FSD}S$ , jika

$$F(V;\eta)\leq F(S;\eta) \text{ untukr } \eta\in\mathrm{R}.$$

Bentuk kedua fungsi $F_2$ , diberikan dari area di bawah distribusi fungsi *F*,

$$F_2(V;\eta)=\int_{-\infty}^{\eta}F(V;\xi)d\xi \text{ untuk } \eta\in\mathrm{R}.$$

dan defnisikan relasi yang lemah dari order kedua stokastik domonance(SSD). Random return *V* stokastically dominates *S* ke second order, dinotasikan $V\succeq_{SSD}S$ , jika

$$F_2(V;\eta)\leq F_2(S;\eta) \text{ for } \eta\in\mathrm{R}.$$

Dalam *paper* optimasi portfolio ini, kita dapat memberikan relasi-relasi stokastik dominance antara random return di (2.1) jika menghindari penempatan vetor keputusan , *x*, dalam eksperesi indek, dapat ditulis sederhana

$$F(\eta;x) = F^{R(x)}(\eta) \text{ and } F_2(\eta;x) = F_2^{R(x)}(\eta).$$

Kita sebut bahwa portfolio x mendominasi portfolio y di bawah aturan *FSD*, jika

$$F(R(x);\eta) \le F(R(y);\eta) \text{ untuk semua } \eta \in \mathrm{R},$$

Dimana sedikitnya satu strick inequality holds. Sama halnya bahwa *x* mendominasi y di bawah aturan *SSD* $(R(x) \succeq_{SSD} R(y))$, jika

$$F_2(R(x);\eta) \le F_2(R(y);\eta) \text{ for all } \eta \in \mathrm{R},$$

dengan minimal satu inequality strict. Untuk individual return $R_j$ memiliki batas nilai ekspektasi dan fungsinya $F_2(R(x);\cdot\eta)$ dapat didefinisi dengan baik.

Relasi stokastik dominance sangat penting untuk teori keputusan. Telah diketahui bahwa $R(x) \succeq_{FSD} R(y)$ jika dan hanya jika

$$E[u(R(x))] \ge E[u(R(y))] \qquad 2.4$$

Untuk berbagai fungsi tidak turun u(.) yang mana nilai ekspektasinya adalah terbatas. Selanjutnya, $R(x) \succeq_{SSD} R(y)$ jika dan hanya jika (2.4) tidak turun dan koncave, yang mana nilai ekspektasi terbatas dapat dilihat pada [3,4,6]).

Portfolio x disebut *SSD*-effisient (atau *FSD*-effesient) dalam sebuah himpunan portfolio *X* jika tidak terdapat $y \in X$ seperti $(R(y) \succ_{SSD} R(x))$ (or $(R(y) \succ_{FSD} R(x))$).

Kita akan memfokuskan perhatian pada relasi SSD, karena konsistensinya dengan tampilan _ preferensi resiko yang berlawanan resiko: jika $(R(y) \succ_{SSD} R(x))$, maka portfolio *x* lebih disukai dari y dengan semua resiko averse decision makers.

**Definition 2.1** [1] Model *mean-risk* $(\mu,\rho)$ *adalah konsisten terhadap SSD dengan koefisien* $\alpha > 0$ *,jika relasi berikut dipenuhi*

$$R(x) \succeq_{SSD} R(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) - \lambda\rho(x) \ge \mu(y) - \lambda\rho(y) \text{ untuk semua } 0 \le \lambda \le \alpha.$$

Perhatikan model optimasi berikut [3]:

(2.9) $\max f(x)$

(2.10) Subject to $R(x) \succeq_{(2)} Y$,

(2.11) $x \in X$

Dimana $f : X \to \mathrm{R}$ adalah fungsi kontinu konkav dan dituliskan,

$$f(x) = \mathrm{E}[R(x)]$$

dan ini akan tetap memiliki solusi *nontrivial*, dengan melihat sifat dominance constraint.

**Proposisi 2.1** [3] *Asumsikan bahwa* $Y$ *sua*tu *distribusi diskrit dengan realisasi* $y_i, i = \overline{1,m}$. *Maka relasi* (2.10) *eqivalen dengan*

(2.12) $$\mathrm{E}[(y - R(x))_+] \le \mathrm{E}[(y - Y)_+], \forall i$$

Asumsikan bahwa return memiliki joint distribusi distkrit dengan relasi $r_{tj}$, $t = 1, \ldots, T$, $j = \overline{1, n}$, probabilitas $p_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Formulasi relasi stokastik dominance (2.10) dan (2.12) _ _ _ bahkan lebih. Memperkenalkan variabel sit menampilkan shortfall of $R(x)$ below $y_i$ in realization $t$, $i = 1, \ldots, m$ and $t = 1, \ldots, T$, kita dapatkan hasil sebagai berikut.

**Proposition 2.2** [3] *Assume that* $R_j, j = 1,\ldots,n$, *and Y have discrete distributions. Then problem* (2.9)–(2.11) *is equivalent to the problem*

(2.13) $$\max f(x)$$

(2.14) $$\text{Subject to } \sum_{j=1}^{n} r_{tj} x_j - s_{it} \le -y_i,\ i = 1,\ldots,m,\ t = 1,\ldots,T,$$

(2.15) $$\sum_{t=1}^{T} p_t s_{it} \le F_2(Y; y_i),\ i = 1,\ldots,m,$$

(2.16) $$s_{it} \ge 0\ i = 1,\ldots,m,\ t = 1,\ldots,T$$

(2.17) $$\sum_{j=1}^{n} x_j \le 1$$

(2.18) $$-\sum_{j=1}^{n} x_j \le -1$$

(2.19) $$x_j \ge 0\ , j=1,\ldots,n$$

dan hal ini ekivalen terhadap masalah :

(2.20) $$\max \varphi(X) = \max \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

(2.21) $$\text{Subject to } \sum_{j=1}^{n+mT} a_{ij} X_j \le b_i,\ i = 1,\ldots,mT + 2 + m,$$

(2.22) $$X_j \ge 0\ ,\ j = 1,\ldots,n + mT$$

dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} -r_{ij} & , j = 1,\ldots,n, i = i = Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1) \\ -1 & , i = Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1)\ and\, j = n+1,\ldots,n+T(i-1)+1 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , j = 1,..,n, i = mT + 1 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & , j = 1,..,n,\ i = mT + 2 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} p_{j-n-T(K-1)} & , j = n+T(K-1)+1,\ldots,n+TK and\, K = 1,\ldots,m, i = mT+3,\ldots,mT+m+2 \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

Selanjutnya akan dikembangkan hasil ini dari Darinka dan Andrzej [3] ke teori keputusan fuzzy.

### 3. Portfolio problems with fuzzy technological coefficients

Pada bagian ini akan presentasikan portofolio seleksi dengan menggunakan pendekatan teori keputusan fuzzy theory.
Ambil masalah pemograman linier (2.20)-(2.22) dengan koefisien teknologi fuzzy [13].

(3.1) $$\max \varphi(X) = \max \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

(3.2) $$\text{s/t} \quad \sum_{j=1}^{n+mT} \tilde{a}_{ij} X_j \le b_i,\ i = 1,\dots, mT + 2 + m,$$

(3.3) $$X_j \ge 0,\ j = 1,\dots, n + mT$$

**Assumpsi 2.1**. $\tilde{a}_{ij}$ adalah fuzzy number dengan fungsi linear membership function :

(i) 1. Untuk $i=Km+1,\dots,(K+1)m$, $K=0,\dots,(T-1)$ dan $j=1,\dots,n$

$$\mu_{a_{ij}}(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t < -r_{ij}, \\ (-r_{ij} + d_{ij} - t)/d_{ij} & if \quad -r_{ij} \le t < -r_{ij} + d_{ij}, \\ 0 & if \quad t \ge -r_{ij} + d_{ij,} \end{cases}$$

2. Untuk $i=Km+1,\dots,(K+1)m$, $K=0,\dots,(T-1)$ dan $j=n+T(i-Km-1)+K+1$

$$\mu_{a_{ij}}(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t < -1 \\ (-1 + d_{ij} - t)/d_{ij} & if \quad -1 \le t < -1 + d_{ij}, \\ 0 & if \quad t \ge -1 + d_{ij,} \end{cases}$$

(ii) Untuk $i=mT+3, \dots, mT+2+m$; $K=1,\dots m$ dan $j=n+T(K-1)+1,\dots,n+TK$

$$\mu_{a_{ij}}(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t < p_{j-n-T(K-1)}, \\ (p_{j-n-T(K-1)} + d_{ij} - t)/d_{ij} & if \quad p_{j-n-T(K-1)} \le t < p_{j-n-T(K-1)} + d_{ij}, \\ 0 & if \quad t \ge p_{j-n-T(K-1)} + d_{ij,} \end{cases}$$

Dimana $t \in R$ dan $d_{ij} > 0$ untuk semua $i=1,\dots,mT+m+2$, $K=0,\dots,(T-1)$ dan $j = 1,\dots,n+mT$.
Untuk kefuzzian pada masalah ini, pertama di bentuk fungsi objectif fuzzy. Hal ini dengan menghitung batasa atas dan batas bawah dari nilai optimal petama. Batas-batas nilai optimal $z_l$ dan $z_u$ diperoleh dari penyelesaian masalah standar pemograman linier.

(3. 4) $$z_1 = \max \varphi(X)$$

(3. 5) $$\text{s/t} \quad \sum_{j=1}^{n+mT} a_{ij} X_j \le b_i,\ i=1,\dots,mT+m+2$$

(3.6) $$X_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n+mT$$

dan

(3.7) $$z_2 = \max \varphi(X)$$

(3.8) s/t $\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij} X_j \le b_i$, $i$=1,…,$mT$+$m$+2

(3.9) $X_j \ge 0$ , $j$ = 1,…,$n$+$mT$

dimana

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} -r_{ij} + d_{ij} & , j = 1,\ldots,n, i = i = Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1) \\ -1 + d_{ij} & , i = Km+1,\ldots,(K+1)m, K = 0,\ldots,(T-1)\ and\, j = n+1,\ldots,n+T(i-1)+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + d_{ij} & , j = 1,..,n, i = mT+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} -1 + d_{ij} & , j = 1,..,n,\ i = mT+1 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} p_{j-n-T(K-1)} + d_{ij} & , j = n+T(K-1)+1,\ldots,n+TK\ dan\ K = 1,\ldots,m, i = mT+3,\ldots,mT+m+2 \\ d_{ij} & , lainnya \end{cases}$$

Fungsi onjektif diberikan antara $z_1$ dan $z_2$ juga koefisien teknologi antara $a_{ij}$ dan $a_{ij} + d_{ij}$. Berikan $z_{\mathrm{l}} = \min(z_1, z_2)$ dan $z_{\mathrm{u}} = \max(z_1, z_2)$.

Maka $z_{\mathrm{l}}$ dan $z_{\mathrm{u}}$ secara berturut- turut disebut batas bawah dan batas atas dari nilai optimal.

**Assumption 2.2**. Linear crisp masalah (3.4)-(3.6) dan (3.7)-(3.9) menpunyai nilai optimal terbatas. Dalam kasus ini himpunan fuzzy dari nilai optimal, *G*, dimana *G* adalah subset dari $R^n$, ditentukan pada [ 11 ]

$$(3.10)\quad \mu_G(X) = \begin{cases} 0 & if\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j < z_{\mathrm{l}} \\ (\sum_{j=1}^{n} c_j X_j - z_{\mathrm{l}})/(z_{\mathrm{u}} - z_{\mathrm{l}}) & if\ z_{\mathrm{l}} \le \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \le z_{\mathrm{u}} \\ 1 & if\ \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \ge z_{\mathrm{u}} \end{cases}$$

Himpunan fuzzy pada kendala ke-$i$, $C_i$, yang merupakan subset dari $R^m$, didefinisikan:

(*i*) 1. For *i*=*Km*+1,…,(*K*+1)*m* dan *K*=0,…,(*T*-1)

$$(3.11)\quad \mu_{C_i}(X) = \begin{cases} 0 & , b_i < -\sum_{j=1}^{n} r_{ij} X_j \\ (b_i - \sum_{j=1}^{n} -r_{ij} X_j) / \sum_{j=1}^{n} d_{ij} X_j & , -\sum_{j=1}^{n} r_{ij} X_j \le b_i < \sum_{j=1}^{n} (-r_{ij} + d_{ij}) X_j \\ 1 & , b_i \ge \sum_{j=1}^{n} (-r_{ij} + d_{ij}) X_j \end{cases}$$

(*i*) 2. For *i*=*Km*+1,…,(*K*+1)*m*, dan *K*=0,…,(*T*-1)

$$\text{(3.12)}\quad \mu_{C_i}(X)=\begin{cases} 0 & ,b_i < -\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j \\ (b_i+\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j)/\sum_{j=1}^{n} d_{ij}X_j & ,-\sum_{j=n+1}^{n(i,K)} X_j \le b_i < \sum_{j=n+1}^{n(i,K)}(-1+d_{ij})X_j \\ 1 & ,b_i \ge \sum_{j=n+1}^{n(i,K)}(-1+d_{ij})X_j \end{cases}$$

dimana $n(i,K)=n+T(i\text{-}Km\text{-}1)+K+1$

(*ii*) Untuk $i=mT+3, \ldots, mT+2+m$ dan $K=1,\ldots, m$

$$\text{(3.13)}\quad \mu_{C_i}(X)=\begin{cases} 0 & ,b_i < \sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j \\ (b_i-\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j)/\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} d_{ij}X_j & ,\sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK} p_{j-n-T(K-1)}X_j \le b_i < \sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK}(p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij})X_j \\ 1 & ,b_i \ge \sum_{j=n+T(K-1)}^{n+TK}(p_{j-n-T(K-1)}+d_{ij})X_j \end{cases}$$

Dengan menggunakan definisi dari keputusan fuzzy dari Bellman and Zadeh [2], didapatkan

$$\mu_D(X)=\min(\mu_G(X),\min_j(\mu_{C_j}(X)).$$

i.e.

$$\max_{x\ge 0}(\mu_D(X))=\max_{x\ge 0}\min(\mu_G(X),\min_j(\mu_{C_j}(X))$$

Konsekwensinya, masalah (3.1)-(3-3) menjadi bentuk optimisasi dibawah ini

(3.14) $\max \lambda$

(3.15) $\mu_G(X)\ge\lambda$

(3.16) $\mu_{C_i}(X)\ge\lambda \quad 1\le i\le mT+m+2$

(3.17 $X_j\ge 0$, $0\le\lambda\le 1$, $j=1,\ldots,mT$ .

Dengan menggunakan persamaan (3.10) dan (3.11)-(3.13), mendapatkan teorema berikut:

**Teorema 3.1** *Masalah (3.1)-(3.3) direduksi menjadi salah satu dari crisp problem berikut ini*:

(3. 18) $\max\lambda$

(3.19) $\lambda(z_1-z_2)-\sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 \le 0$

(3.20) $\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i \le 0$, $i=1,\ldots,mT+m+2$

(3.21) $X_j\ge 0$, $0\le\lambda\le 1$, $j=1,\ldots,mT$ .

dimana

$$\hat{a}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}-r_{ij}+\lambda d_{ij} & ,\ j=1,\dots,n,Km+1,\dots,(K+1)m,\ K=0,\dots,(T-1)\\ -1+\lambda d_{ij} & ,i=Km+1,\dots,(K+1)m,\ K=0,\dots,(T-1)\ dan\ j=n+1,\dots,n+T(i-1)+1\\ \lambda d_{ij} & ,lainnya\end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}1+\lambda d_{ij} & ,\ j=1,..,n,i=mT+1\\ \lambda d_{ij} & ,lainnya\end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}-1+\lambda d_{ij} & ,\ j=1,..,n,i=mT+2\\ \lambda d_{ij} & ,\quad lainnya\end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}p_{j-n-T(K-1)}+\lambda d_{ij} & ,\ j=n+T(K-1)+1,\dots,n+TK, i=mT+3,\dots,mT+m+2\\ \lambda d_{ij} & ,\ lainnya\end{cases}$$

Perlu diperhatikan bahwa, kendala pada (3.18)-(3.21) memuat cross product dari $\lambda X_j$ adalah tidak konveks.

## 4. Solution of defuzzificated problems

Pada seksi ini, akan dipresentasikan metode modifikasi subgradient [5] dan ini akan digunakan untuk penyelesaian masalah defuzzifikasi (3.18)-(3.21). Sebagai catatan bahwa, kendala pada (3.18)-(3.21) adalah secara umum non-konveks. Model ini diselesaikan dengan metode himpunan decisive fuzzy, yang dipresentasikan oleh Sakawa dan Yana [15], atau metode linierisasi oleh Kettani dan Oral [9].

### 4.1. Applikasi metode modifikasi subgradient untuk masalah pemrograman linier.

Penggunaan metode subgradien [5] pada masalah (3.18)-(3.21), pertama di bentuk model kendala persamaan dengan slak variabel $y_0$ dan $y_i$. Maka dapat kita tuliskan:

(4.1) $$\max \lambda$$

(4.2) $$g_0(X,\lambda,y_0)=\lambda(z_1-z_2)-\sum_{j=1}^{n}c_jX_j+z_2+y_0=0$$

(4.3) $$g_i(X,\lambda,y_i)=\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j-b_i+y_i=0,\ i=1,\dots,mT+m+2$$

(4.4) $$X_j\ge 0,\ y_0,y_i\ge 0,\ 0\le\lambda\le 1,\ j=1,\dots,mT,\ i=1,\dots,mT+m+2.$$

Untuk masalah ini definisikan himpunan *S*:

$S=\{(X,p,\lambda)\,|\,X=(X_1,\dots,X_n),y=(y_1,\dots,y_n),X_i\ge 0,y_0,y_i\ge 0,0\le\lambda\le 1\}$.

Karena $\max\lambda=-\min(-\lambda)$ dan $g(X,\lambda,p)=(g_0,\dots,g_m)$ augmented Lagrangian yang bersesuaian dengan masalah (4.1)-(4.4) dapat ditulis dalam bentuk:

$$L(x,u,c)=-\lambda+c\left[\left\{\lambda(z_1-z_2)-\sum_{j=1}^{n}c_jX_j+z_2+y_0\right\}^2+\sum_{i=1}^{mT+m+2}\left(\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j-b_i+y_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$-\mu_0\left(\lambda(z_1-z_2)-\sum_{j=1}^{n}c_jX_j+z_2+y_0\right)-\sum_{i=1}^{mT+m+2}u_i\left(\sum_{j=1}^{n+mT}\hat{a}_{ij}(\lambda)X_j-b_i+y_i\right).$$

Sebagai ilustrasi pada (4.1)-(4.4) dilakukan dengan cara:

*Inisialisation Step.* Pilih vector $(u_0^1, u_1^1, ..., u_{mT+m+2}^1, c^1)$ dengan $c^1 \geq 0$, ambil $k = 1$, and go to main step.

***Main Step.***

*Step 1 .* Berikan $(u_0^k, u_1^k, ..., u_{mT+m+2}^k, c^k)$ *;* selesaikan submasalah dibawah ini:

$$\min -\lambda + c\left[\left\{\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right\}^2 + \sum_{i=1}^{mT+m+2}\left(\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i + y_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$-u_0\left(\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + z_2 + y_0\right) - \sum_{i=1}^{mT+2} u_i\left(\sum_{j=1}^{n+mT} \hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i + y_i\right).$$

$$(X, y, \lambda) \in S.$$

Berikan $(X^k, y^k, \lambda^k)$ suatu solusi. If $g(X^k, y^k, \lambda^k)$, then stop; $(u_0^k, u_1^k, ..., u_{mT}^k, c^k)$ adalah penyelesaian masalah dual, $(X^k, \lambda^k)$ adalah penyelesaian masalah (3.18)-(3.21). Lainnya, go to Step 2.

*Step 2 .* Berikan

$$u_0^{k+1} = u_0^k - h^k\left(\lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_2 + y_0\right)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - h^k\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}(\lambda)X_j - b_i + y_i\right), Km+1 \leq i \leq (K+1)m \text{ dan } 0 \leq K \leq T-1$$

$$c^{k+1} = c^k + (h^k + \varepsilon^k)\|g(x_k)\|$$

dimana $h^k$ dan $\varepsilon^k$ adalah scalar positif (stepsizes) dan $h^k > \varepsilon^k > 0$, ganti $k$ dengan $k + 1$*;* dan kembali ke Step 1.

**4.2. The algorithm of the fuzzy decisive set method**

Metode ini adalah didasari dari ide bahwa, untuk nilai tetap $\lambda$; masalah (3.18)-(3.21) adalah masalah pemograman linier [5]. $\lambda^*$ penyelesaian optimal dari masalah (3.18)-(3.21) adalah eqivalen dengan menentukan nilai maksimum $\lambda$ (himpunan feasible tidak kosong).

Algoritma pada metode ini untuk masalah (3.18)-(3.21) adalah sebagai berikut:

**Algorithm**

**Step 1.** Berikan $\lambda = 1$ dan lakukan pengujian himpunan feasibel yang memenuhi kendala pada problem (3.18)-(3.21). Jika himpunan feasible ada, berikan $\lambda = 1$*:* Lainnya, berikan himpunan $\lambda^L = 0$ dan $\lambda^R = 1$ dan lanjutkan pada step berukut.

**Step 2.** Untuk nilai dari $\lambda = (\lambda^L + \lambda^R)/2$*;* perbaiki nilai dari $\lambda^L$ dan $\lambda^R$ dengan menggunakan metode bisection dibawah ini:

$\lambda^L = \lambda$ *jika himpunan* feasible tidak kosong untuk $\lambda$
$\lambda^R = \lambda$ *j*ika himpunan feasible adalah kosong untuk $\lambda$.

Konsekwensi, untuk setiap $\lambda$, baik dengan adanya himpunan feasibel dari (3.18)-(3.21) atau tidak menggunakan fase satu dari metode simpleks dan menggambarkan nilai maksimum $\lambda^*$ yang memenuhi kendala pada (3.18)-(3.21).

## References


[1] Andrzej and Robert J. Vanderbei, "*Frontiers of stochastically nondominated portfolio*" Operations research and financial engineering, Princeton University, ORFE -0-01,2002.

[2] Bellman, R.E., Zadeh,L.A., *Decision-making in fuzzy environment*, Management Science 17 (1970), B141-B164.

[3] Darinka Dentcheva and Andrzej Ruszczy´nski, *Portfolio Optimization with Stochastic Dominance* Constraints, May 12, 2003

[4] Darinka Dentcheva *a*nd Andrzej Ruszczy´nski, *Optimization with stochastic dominance constraints*, Siam J. Optim.Society For Industrial And Applied Mathematics Vol. 14 (2003), No. 2, Pp. 548–566

[5 ] Gasimov, R. N., Yenilmez K., *Solving fuzzy linear programming problems with linear membership functions,* Turk J Math. 26 (2002) , 375 -396.

[6] Fernando, K. F., *Practical Portfolio Optimization*, NAG. Ltd., Wilkinson House Jordan Hill Oxford OX2 8DR.

[8] G. Hanoch and H. Levy, *The efficiency analysis of choices involving risk*, Rev. Econom.Stud., 36 (1969), pp. 335–346.

[9] H. M. Markowitz, *Mean–Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Blackwell, Oxford, 1987.

[9] J. Hadar and W. Russell, *Rules for ordering uncertain prospects*, Amer. Econom. Rev., 59 (1969), pp. 25–34.

[10] J.R Birge and F.V. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[11] Kettani, O., Oral, M.: *Equivalent formulations of nonlinear integer problems for eficient optimization*, *Management Science* Vol. **36** No. 1 (1990) 115-119.

[12] Klir, G.J., Yuan, B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic-Theory and Applications, Prentice-Hall Inc. (1995), 574p.

[13] Negoita, C.V.: *Fuzziness in management*, OPSA/TIMS, Miami (1970).

[14] Ruszczynski A. and Vanderbei R. J., *Frontiers of stochastically nondominated portfolios*, Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, ORFE-02-01, 2002

[15] R.T. Rockafellar and R.J.-B. Wets, *Stochastic convex programming: Basic duality* , Pacific J.Math., 62 (1976), pp. 173-195.

[16] Sakawa, M., Yana, H.: *Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming problems with fuzy parameters,* Cybernetics Systems **16** (1985) 377-397.

[17] Sudradjat, "*Mathematical Progamming Models for Portfolio Selection*, editura Universității din Bucureşti, 2007.

[18] Sudradjat, S., Preda, V., *On portfolio optimization using fuzzy decisions,* ICIAM, Juli 2007.

[19] Sudradjat, S., *On possibilistic approach for a portfolio selection*, Romanian Academy, Mathematical Reports, Vol. 9(59). No. 3. 2007

[20] Tanaka, H., Asai, K.: *Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers*, *Fuzzy Sets and Systems* **13** (1984) 1-10
[21] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K.: *On fuzzy mathematical programming*, J. Cybernetics **3** (1984) 37-46.
[22] Uryasev, S. and R.T. Rockafellar, *Conditional value-at-risk: Optimization approach,* in Stochastic Optimization: Algorithms and Applications (Gainesville, FL, 2000), Appl. Optim. 54, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 2001, pp. 411–435.
[23] Zimmermann, H.J.: *Fuzzy mathematical programming*, *Comput. & Ops. Res.* Vol. **10** No 4 (1983) 291-298.