Model *Value at Risk Contribution* Portofolio Investasi *

Sukono[1], Subanar[2] & Dedi Rosadi[3]
[1] Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Bandung, e-mail : fsukono@yahoo.com
[2] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : subanar@yahoo.com
[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : dedirosadi@ugm.ac.id

ABSTRAK

Manajemen risiko finansial bertujuan untuk menyeimbangkan antara risiko dan keuntungan sesuai dengan kebijakan manajemen risiko yang ditetapkan, dari batasan keputusan taktis dinamis hingga keputusan strategi alokasi modal. *Value at Risk* (*VaR*) telah dipergunakan secara luas oleh lembaga finansial untuk kepentingan internal dalam pembuatan keputusan. Dalam paper ini dikaji model *VaR Cotribution* yang dapat dipergunakan untuk memperlihatkan kontribusi *VaR* untuk faktor-faktor risiko berbeda, dan juga untuk menghitung risiko pada beberapa subportofolio bisnis.

Kata Kunci: portofolio investasi*, pengukuran risiko, Value at Risk, Value at Risk Contribution*.

ABSTRACT

Financial risk management has purpose to balance out between risk and profit appropriate with risk management policy which was decided, from tactical and dynamic decision restriction up to decision of capital allocation strategy. Value at Risk (VaR) already used widely by financial institution in the interest of the internal on decision making. In this paper was studied VaR Contribution model which can used to show VaR Contribution of different risk factors and also to count risk at some business sub-portfolio.

Keywords : *Portfolio investment, risk measurement, Value at Risk, Value at Risk Contribution.*

* Dipublikasikan dalm Seminar Nasional Matematika dan Statistika 2008, Jurusan Matematika FMIPA – UNAIR, Surabaya, pada tanggal 20 Desember 2008.

1. PENDAHULUAN

Value at Risk (*VaR*) total dihitung dengan mengikutsertakan semua instrumen investasi dan faktor-faktor risikonya. *Stand-alone* VaR untuk sub-portfolio adalah VaR yang akan dimiliki oleh portfolio jika mengesampingkan seluruh instrumen dan faktor risiko lainnya. Serupa dengan *Stand-alone* VaR untuk subportfolio, *Stand-alone* VaR untuk faktor risiko dihitung dengan menyetel standar deviasi pada semua faktor risiko yang lain menjadi nol. Sensitivitas nilai portfolio untuk berubah menjadi faktor-faktor risiko diberikan oleh vektor turunan yang digunakan dalam parameter VaR (Ruppert, 2004).

Masalah pokok pada *stand-alone* VaR yaitu jumlah dari *stand-alone* VaR, pada umumnya tidak sama dengan VaR total. Lalu, *stand-alone* VaR mengesampingkan korelasi dengan semua portfolio. Ini karena persamaan untuk VaR total memasukkan pengkuadratan semua *stand-alone* VaR, memasukkan korelasi, dan yang terakhir menggunakan akar pangkat. Untuk lebih jelasnya, di bawah ini terdapat contoh parameter VaR untuk sebuah portfolio dengan dua buah sub-portfolio A dan B. Disini *SVaR* mewakili *stand-alone* VaR (Marrison, 2002):

$$VaR_{Portfolio} = \sqrt{SVaR_A^2 + 2\rho_{AB} SVaR_A SVaR_B + SVaR_B^2}$$

Suatu teknik VaR *Contribution* (VaRC) sangatlah berguna karena memberikan ukuran risiko untuk tiap sub-portofolio individu yang memberikan efek-efek korelasi inter-portofolio. Selanjutnya VaRC disusun sehingga jumlah semua VaRC untuk semua sub-portfolio sama dengan total dari portfolio. Seperti diuraikan berikut ini, VaRC berguna juga untuk mengalokasikan modal investor ke unit-unit investasi disebabkan oleh faktor risiko, dan untuk mengatur batasan-batasan dari jumlah risiko yang dapat ditimbulkan oleh masing-masing investasi individual (Marrison, 2002).

Dalam paper ini bertujuan menunjukkan VaRC untuk faktor-faktor risiko individual dan untuk subportfolio individu. Di samping itu juga akan ditunjukkan bagaimana VaRC dapat dikalkulasi dalam bentuk-bentuk aljabar, jumlahan, dan matriks. Dalam tiap-tiap kasus akan dimulai portfolio dengan dua risiko, kemudian dikembangkan dengan portfolio banyak risiko.

2. MODEL MATEMATIKA

2.1 VaRC Dalam Notasi Aljabar

Anggap suatu portfolio terdiri dua sumber risiko, A dan B. Variansi dari nilai portfolio akan setara dengan jumlah variansi dari dua sumber dan kovariansi diantara keduanya :

$$\sigma_p^2 = \sigma_A^2 + 2\rho A.B\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2 \tag{2.1}$$

Persamaa ini dapat ditulis kembali menjadi suatu jumlah faktor perkalian dengan σ_A dan satunya lagi dengan σ_B:

$$\sigma_p^2 = \sigma_A(\sigma_A + 2\rho A.B\sigma_B) + \sigma_B(\sigma_B + 2\rho A.B\sigma_A) \tag{2.2}$$

Bila dibagi kedua sisi dengan standar deviasi dari portfolio didapatkan suatu persamaan penjumlahan standar deviasi :

$$\sigma_p = \sigma_A \left(\frac{\sigma_A + 2\rho A.B\sigma_B}{\sigma_p} \right) + \sigma_B \left(\frac{\sigma_B + 2\rho A.B\sigma_A}{\sigma_p} \right) \tag{2.3}$$

Syarat-syarat dalam tanda kurung besar mewakili korelasi rata-rata diantara risiko yang didapat dan seluruh portfolio. Dalam perameter pendekatan, $VaR(\alpha)$ adalah z_α kali standar deviasi:

$$\begin{aligned} VaR_p &= z_\alpha \sigma_p \\ &= z_\alpha \sigma_A \frac{(\sigma_A + 2\rho A.B\sigma_B)}{\sigma_p} + z_\alpha \sigma_B \frac{(\sigma_B + 2\rho A.B\sigma_A)}{\sigma_p} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Di mana $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ tail kiri dari distribusi normal standar. Sehingga dapat didefinisikan kontribusi VaR untuk dua risiko, A dan B, dapat dijumlahkan menjadi VaR total (Marrison, 2002; Denouit et al. (2005):

$$\begin{aligned} VaRC_A &= z_\alpha \sigma_A \left(\frac{\sigma_A + \rho_{A.B}\sigma_B}{\sigma_P} \right) \\ VaRC_B &= z_\alpha \sigma_B \left(\frac{\sigma_B + \rho_{A.B}\sigma_A}{\sigma_P} \right) \\ VaR_p &= VaRC_A + VaRC_B \end{aligned} \tag{2.5}$$

Perhatikan bahwa setiap faktor VaRC termasuk diantaranya korelasi dan variansi dari faktor-faktor lainnya. Dalam parameter VaR, anggap bahwa setiap variansi adalah perkalian sensitivitas dengan standar deviasi dari faktor risiko:

$$\sigma_A = d_1 \sigma_1$$

$$\sigma_B = d_2 \sigma_2$$

Di mana d_1 adalah tingkat nilai tukar rupiah terhadap uang asing tertentu dengan deviasi standar σ_1 yang diperoleh berdasarkan data historis, dan d_2 adalah tingkat suku bunga dalam kondidi *maturity* dengan deviasi standar σ_2 yang diperoleh dari data historis. Dengan substitusi ini, variansi dari nilai portfolio dan VaRC dihitung sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = (d_1\sigma_1)^2 + 2\rho_{1.2}(d_1\sigma_1)(d_2\sigma_2) + (d_2\sigma_2)^2 \tag{2.6}$$

$$VaRC_1 = z_\alpha \times d_1\sigma_1 \frac{[d_1\sigma_1 + \rho_{1.2}d_2\sigma_2]}{\sigma_p} \tag{2.7}$$

$$VaRC_2 = z_\alpha \times d_2\sigma_2 \frac{[d_2\sigma_2 + \rho_{1.2}d_1\sigma_1]}{\sigma_p} \tag{2.8}$$

Jika kita memiliki lebih dari dua faktor risiko, kita dapat menggunakan proses yang sama dari syarat-syarat grup untuk memperoleh hasil VaRC sebagai berikut (Marrison, 2002):

$$VaRC_1 = z_\alpha d_1 \sigma_1 \left(\frac{d_1\sigma_1 + \rho_{1.2} d_2 \sigma_2 + ... + \rho_{1.\times} d_\times \sigma_\times}{\sigma_p} \right) \tag{2.9}$$

$$VaRC_N = z_\alpha d_N \sigma_N \left(\frac{\rho_{N.1} d_1\sigma_1 + \rho_{N.2} d_2 \sigma_2 + ... + d_N \sigma_N}{\sigma_p} \right) \tag{2.10}$$

2.2 Model VaRC Dalam Notasi Jumlahan

Notasi jumlahan dapat digunakan jika terdapat banyak faktor risiko karena dapat menunjukkan persamaan yang panjang dalam bentuk singkat. Dalam banyak kasus, notasi jumlahan berguna sebagai rumus cepat. Dalam notasi jumlahan, VaR dapat ditulis sebagai berikut (Marrison, 2002):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \rho_{i.j} \left(d_j \sigma_j\right)\left(d_i \sigma_i\right) \tag{2.11}$$

Kita dapat mengelompokkan lagi dan kemudian dibagi dengan σ_p untuk memperoleh syarat-syarat berikutnya sehingga dapat dihitung melalui *i*:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{N} d_i \sigma_i \times \frac{\sum_{j=1}^{N} \rho_{i.j} d_j \sigma_j}{\sigma_p} \tag{2.12}$$

Untuk setiap *i*, syarat yang berhubungan menjelaskan kontribusi VaR untuk faktor *i*:

$$VaRC_i \equiv z_\alpha \times d_i \sigma_i \times \frac{\sum_{j=1}^{N} \rho_{i.j} d_j \sigma_j}{\sigma_p} \tag{2.13}$$

2.3 Model VaRC Dalam Notasi Matriks

Notasi matriks juga memberi suatu cara penulisan singkat yang baik dari penulisan persamaan, dan juga membantu untuk menunjukkan dengan mudah bagaimana VaRC dapat dihitung, baik untuk faktor risiko tunggal yang mempengaruhi banyak posisi atau untuk posisi tunggal yang dipengaruhi oleh banyak faktor risiko (Hallerbrek & Menkveld, 2001).

Dapat ditulis persamaan VaR untuk dua faktor resiko dalam notasi matriks seperti berikut:

$$\begin{aligned} VaR &= z_\alpha \sigma_p \\ \sigma_p^2 &= DCD^T \\ D &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1.2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1.2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Untuk mendefinisikan VaRC, dapat dipecah D kedalam 2 vektor yang sesuai dengan sensitivitas nilai untuk setiap faktor risiko:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_2 &= \begin{bmatrix} 0 & d_2 \end{bmatrix} \\ D &= D_1 + D_2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Persamaan untuk variansi sekarang dapat ditulis sebagai suatu penjumlahan :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= DCD^T \\ \sigma_p^2 &= \left(D_1 + D_2\right) CD^T \\ &= D_1 CD^T + D_2 CD^T \end{aligned} \tag{2.16}$$

Standard deviasi dapat didefinisikan, baik sebagai akar kuadrat dari variansi, atau sebagai variansi dibagi standard deviasi :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{DCD^T} \\ \sigma_p &= \frac{DCD^T}{\sigma_p} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dengan menggunakan kedua definisi ini, dapat ditulis standar deviasi terdiri dari D dan C :

$$\sigma_p = \frac{DCD^T}{\sqrt{DCD^T}} \tag{2.18}$$

Sekarang VaRC dapat dipisahkan pembilang untuk mendefinisikan:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{D_1 CD^T}{\sqrt{DCD^T}} + \frac{D_2 CD^T}{\sqrt{DCD^T}} \\ VaRC_1 &= z_\alpha \frac{D_1 CD^T}{\sqrt{DCD^T}} \\ VaRC_2 &= z_\alpha \frac{D_2 CD^T}{\sqrt{DCD^T}} \\ VaR &= VaRC_1 + VaRC_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Secara umum, jika hendak menghitung VaRC yang berhubungan dengan banyak faktor risiko, dilakukan dengan memecah ke bawah vektor sensitivitas ke dalam sebuah rangkaian vektor dengan semua elemen bernilai nol selain elemen yang sesuai dengan faktor risiko :

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_N \end{bmatrix} \\ D_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ D_2 &= \begin{bmatrix} 0 & d_2 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ D_N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4 VaRC Hitung Untuk Subportofolio

Dari penurunan di atas, diperlihatkan VaR *Contribution* untuk faktor-faktor resiko yang berbeda. VaRC dapat juga dihitung untuk unit-unit atau subportofolio-subportofolio bisnis yang berbeda, yang masing-masingnya bisa membagi faktor-faktor resiko dengan bagian kas yang lain. Hal ini dapat dengan mudah ditunjukkan dalam bentuk notasi matriks. Dalam kasus ini, kami memecah vektor D ke dalam vektor sensitivitas untuk tiap portofolio. Anggap instrumen investasi yang disebutkan terdiri atas sejumlah portofolio dari a sampai z. Vektor sensitivitas instrumen investasi secara keseluruhan masing-masing memiliki satu elemen dari N faktor resiko (Marisson, 2002):

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_N \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Setiap sensitivitas adalah jumlah dari sensitivitas tiap subportofolio dari a sampai z:

$$d_1 = d_{1.a} + d_{1.b} + \dots + d_{1.z} \tag{2.22}$$

$$d_N = d_{N.a} + d_{N.b} + \dots + d_{N.z} \tag{2.23}$$

Di sini, $d_{1.a}$ adalah turunan dari nilai subportofolio yang terdapat dalam faktor risiko 1. Kita dapat menempatkan sensitivitas dari setiap subportfolio tersebut dalam vektor-vektor yang terpisah:

$$\begin{aligned} D_a &= \begin{bmatrix} d_{1.a} d_{2.a} \dots d_{N.a} \end{bmatrix} \\ D_b &= \begin{bmatrix} d_{1.b} d_{2.b} \dots d_{N.b} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ D_z &= \begin{bmatrix} d_{1.z} d_{2.z} \dots d_{N.z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Vektor sensitivitas untuk semua instrumen investasi akan sama dengan jumlah vektor-vektor sensitivitas untuk subportofolio :

$$D = D_a + D_b + \dots + D_z \tag{2.25}$$

Bisa juga dengan menghitung variansi portofolio dengan cara seperti di bawah ini

$$\begin{aligned} \sigma_P{}^2 &= DCD^T \\ &= \left(D_a + D_b + \dots + D_z\right) CD^T \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sehingga, kita dapat menggunakan cara yang sama seperti yang telah kita gunakan untuk faktor-faktor risiko untuk mendefinisikan VaRC untuk subportofolio:

$$VaRC_a = \frac{z_\alpha D_a CD^T}{\sqrt{DCD^T}} \tag{2.27}$$

2.5 Menghitung VaRC Menggunakan Monte Carlo atau Simulasi Historis

Dengan menggunakan metode Monte Carlo dan simulasi historis, dapat dihitung nilai VaRC melalui semua hasil simulasi dan menguji semua kejadian di mana VaR dilampaui oleh kemungkinan merugi. Misalnya, jika dilakukan 5000 kejadian, maka 99% VaR akan didefinisikan sebagai ke-50 hasil terburuk. VaRC dapat dihitung menggunakan 50 kasus ini ketika kerugian (*loss*) sama atau melebihi nilai VaR (Dowd, 2002; Marrison, 2002).

Pada setiap kesempatan saat VaR terlampaui, dicatat kerugian dari posisi individual. Kemudian diberikan persentase kontribusi masing-masing posisi pada kerugian portfolio seperti yang dijelaskan dalam persamaan:

$$\%Kontribusi\,Posisi_i = \frac{\sum\left[Loss_i \mid \left(Loss_p > VaR\right)\right]}{\sum\left[Loss_p \mid \left(Loss_p > VaR\right)\right]} \tag{2.28}$$

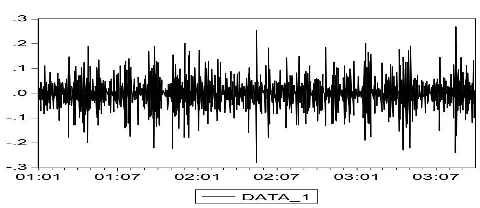
Di mana $\left[Loss_i \mid \left(Loss_p > VaR_p\right)\right]$ mewakili kerugian dari posisi i, dengan kerugian portfolio lebih besar dari pada portfolio VaR.

Kemudian didefinisikan VaR Contribution di dalam syarat pada posisi i dengan VaR total untuk portfolio (VaR_p) dikalikan dengan persentase kontribusi posisi tersebut:

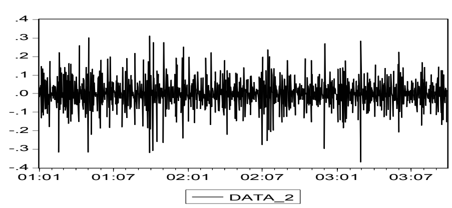
$$VaRC_i = VaR_p \times \%Kontribusi\,Posisi_i \tag{2.29}$$

3. ANALISIS KASUS

Data observasi merupakan harga penutupan saham A dan saham B selama 1001 hari transaksi, yang transaksinya berlangsung selama lima hari dalam seminggu kecuali hari libur. Karakteristik data yang dianalisis merupakan data log *return* (*Continously Compounded Return*) harga penutupan saham A dan saham B. Grafik dari data log *return* harga penutupan saham seperti tampak dalam Gambar 3.1.a dan Gambar 3.1.b berikut ini.

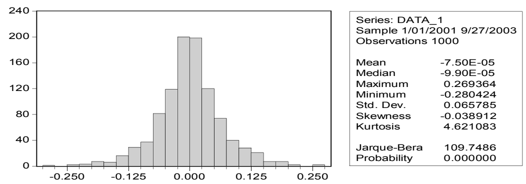


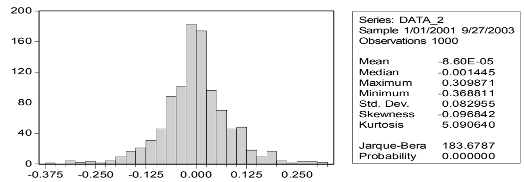
Gambar 3.1.a : Log return harga saham A



Gambar 3.1.b : Log return harga saham B

Dalam paper ini estimasi VaRC dilakukan dengan pendekatan parametrik, yakni harus diestimasi terlebih dahulu distribusi dari data yang dianalisis. Berdasarkan data yang ditunjukkan dalam Gambar 3.1 dan histigram data, hasilnya seperti diberikan dalam Gambar 3.2.a dan Gambar 3.2.b berikut ini,

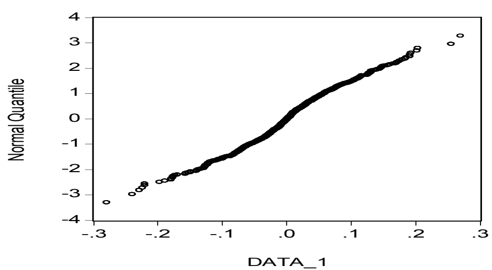


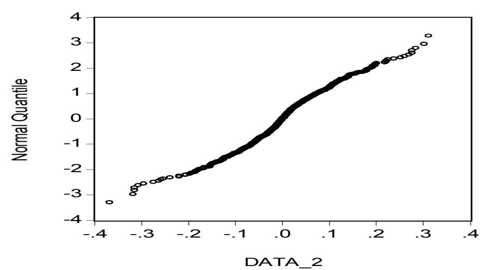


Gambar 3,2,a : Histogram log return harga saham A

Gambar 3.2.b : Histogram log return harga saham B

Memperhatikan Gambar 3.2.a dan Gambar 3.2.b, dapat ditentukan hipotesis distribusi data log return harga saham A dan saham B. Hipotesisnya adalah H_0: data terdistribusi normal, melawan alternatif H_1: data tidak terdistribusi norma. Uji kecocokan distribusi dilakukan dengan menggunakan Q-Q plot dan Jarque-Bera seperti diberikan dalam Gambar 3.3.a dan Gambar 3.3.b berikut ini.





Gamabar 3.3.a : Q-Q plot log return harga saham A

Gambar 3.3.b : Q-Q plot log return harga saham B

Berdasarkan nilai Jarque-Bera saham A 109,7486 dan nilai Jarque-Bera saham B 183.6797, serta Q-Q plot masing-masing tampak terletak pada satu garis, dapat disimpulkan sebagai berikut ini.

Tabel 3.1 : Distribusi, rata-rata dan deviasi standar

Instrumen Investasi	**Distribusi**	**Rata-rata**	**Deviasi standar**
Saham A	Normal	-7,50E-05	0,065785
Saham B	Normal	-8,60E-05	0,082955

Saham A dan saham B memiliki nilai korelasi $\rho_{AB} = 0,998832$, dan deviasi standar yang dihitung dengan rumus (2.1) hasilnya adalah $\sigma_P = 0,148697$. Dengan tingkat signifikansi $\alpha = 95\%$ didapat dari tabel distribusi normal standar $z_\alpha = 1,645$ dan asumsi bahwa investasi awal sebesar satu satuan serta asumsi rata-rata masing-masing saham nol, dapat dihitung besarnya $VaRC_A$, $VaRC_B$, dan $VaRC_P$, berturut-tururt menggunakan persamaan (2.5), hasilnya adalah $VaRC_A = 0,108185$, $VaRC_B = 0,136436$, dan $VaRC_P = 0,244621$.

Misalkan bahwa pergerakan volatilitas harga saham A dipengaruhi oleh volatilitas tingkat nilai tukar rupiah terhadap uang asing tertentu, dan pergerakan volatilitas harga saham B dipengaruhi oleh volatilitas tingkat bunga dalam keadaan maturity. Asumsikan $d_1 = 8,9321$, $\sigma_1 = 0,4$, $d_2 = 12,5132$, $\sigma_2 = 0,05$, dan $\rho_{12} = -0,8$. Besarnya deviasi standar portofolio dihitung dengan menggunakan persamaan (2.6) hasilnya adalah $\sigma_p = 0,387678$. Dengan tingkat konfidensi $\alpha = 95\%$ didapat dari tabel distribusi normal standar nilai $z_\alpha = 1,645$, dan asumsi investasi awal sebesar satu satuan, besarnya $VaRC_1$, $VaRC_2$, dan $VaRC_P$, berturut-turut dihitung dengan persamaan (2.7) dan (2.8), hasilnya adalah $VaRC_1 = 46,57729$, $VaRC_2 = 5,92716$, dan $VaRC_P = 52,50445$.

Untuk mendapatkan nilai-nilai $VaRC$ di atas dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan jumlahan, yakni persamaan (2.13) mapun dengan persamaan matriks, yakni persamaan (2.19).

4. KESIMPULAN

Penurunan dari VaRC dapat digunakan untuk menjelaskan faktor-faktor resiko dan subportfolio individual. Juga untuk menunjukkan bagaimana VaRC dapat dihitung di dalam aljabar, bentuk jumlahan, ataupun matriks. Selanjutnya, dari analisis kasus saham A dan saham B, diperoleh masing-masing faktor risiko adalah $VaRC_A = 0,108185$, $VaRC_B = 0,136436$, dan $VaRC_P = 0,244621$. Sedangkan dari contoh perhitungan faktor risiko terhadap instrumen investasi yang dipengaruhi oleh volatilitas tingkat nilai tukar rupiah terhadap uang asing tertentu serta tingkat bungan dalam keadaan maturity adalah $VaRC_1 = 46,57729$, $VaRC_2 = 5,92716$, dan $VaRC_P = 52,50445$.

DAFTAR PUSTAKA

Denuit, D., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. & Laeven, R. (2005). Risk Measurement With Equivalent Utility Principles. (*Download dari internet Januari 2007*).

Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement.* New Delhi, India : John Wiley & Sons, LTD.

Hallerbach, W.G. & Menkveld, A.J. (2001). Analyzing Perceived Downside Risk: the Component Value-at-Risk Framework. *Paper on Line.* Download 6 Oktober 2008.

Marrison, C. (2002). *The Fundamentals of Risk Measurement*. New York : McGraw Hill Company.

Ruppert, D. (2004). *Statistics and Finance* : An Introduction. New York : Springer-Verlag.