MODEL OPTIMASI PORTOFOLIO DI BAWAH RISIKO *DOWNSIDE* *

Sukono[1], Subanar[2] & Dedi Rosadi[3]
[1] Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Bandung, e-mail : fsukono@yahoo.com
[2] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : subanar@yahoo.com
[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : dedirosadi@ugm.ac.id

ABSTRAK

Dalam investasi yang berisiko, terdapat lebih dari satu kemungkinan hasil yang akan diperoleh, di mana probabilitas masing-masing hasil dapat diketahui atau diestimasi. Strategi yang sering digunakan dalam kondisi investasi berisiko adalah membentuk portofolio. Hakekat dari pembentukan portofolio adalah mengalokasikan aset pada berbagai alternatif kesempatan investasi, sehingga risiko investasi dapat diminimumkan. Untuk meminimumkan risiko, optimisasi alokasi aset portofolio perlu dilakukan. Dalam paper ini akan dibahas dua pendekatan optimisasi alokasi aset portofolio di bawah risiko *downside*.

Kata Kunci : Optimasi, portofolio, *Value at Risk, Expected Shortfall,* risiko *downside*

ABSTRACT

In risky investment, it has more than one probably of the yield that will gain, where is each of the yield can know or estimated. The strategy that used often in condition of the investment that risky is the portfolio. The essence of portfolio perform is allocating the asset at various alternative of the investment opportunity, so the risk of investment can minimized. For minimize of the risk, then necessary to conduct the optimization of portfolio asset allocation. In this paper will discussed two optimization approach of the asset portfolio under downside of risk.

Keywords : *Optimization, portfolio, Value at Risk, Expected Shortfall, downside risk*

* Dipublikasikan dalm Seminar Nasional Matematika dan Statistika 2008, Jurusan Matematika FMIPA – UNAIR, Surabaya, pada tanggal 20 Desember 2008.

1. PENDAHULUAN

Barangkali sudah kita pahami apa yang disebut portofolio efisien. Portofolio efisien adalah portofolio yang menghasilkan tingkat keuntungan tertentu dengan risiko terendah, atau risiko tertentu dengan tingkat keuntungan tinggi. Setiap portofolio yang terletak pada *efficient frontier* merupakan portofolio efisien, sehingga kita tidak bisa mengatakan portofolio mana yang optimal.

Jawaban atas pertanyaan tersebut adalah tergantung pada preferensi risiko para investor. Pedoman yang dapat dipergunakan dalam pemilihan portofolio tersebut adalah dengan melakukan optimisasi alokasi aset portofolio. Dalam alokasi asset portofolio akan berkaitan dengan probabilitas penurunan besar harga asset. Hubungan demikian akan berkaitan dengan apa yang disebut risiko *downside*. Optimisasi alokasi aset portofolio yang berhubungan dengan risiko downside tidak selalu dapat dilakukan berdasarkan kriteria mean-variansi biasanya.

Dalam paper ini akan memfokuskan pembahasan pada optimisasi alokasi aset portofolio yang berkaitan dengan risiko downside. Dua pendekatan yang akan dibahas meliputi : (i) pendekatan risiko downside dengan asumsi tambahan fungsi pembatas (*constraint*), dan (ii) pendekatan optimisasi langsung risiko downside.

2. *VALUE at RISK dan EXPECTED SHORTFALL*

Misalkan didefinisikan notasi VaR dan ES. VaR pada probabilitas $\theta \in (0,1)$ dari suatu portofolio didefinisikan sebagai potensi kerugian minimum portofolio yang dapat ditanggung (dalam $\theta\%$) dalam kasus terburuk, sepanjang horizon waktu yang diberikan. Didefinisikan $P_{i,t}$ harga aset i pada waktu t, oleh karena itu *return* aset i antara waktu $t-1$ dan waktu t adalah $r_{i,t} = (P_{i,t} - P_{i,t-1}) / P_{i,t-1}$.

Nilai portofolio pada waktu t, untuk vektor $\mathbf{N}_t$ yang memuat sejumlah *share* dalam aset i, diberikan secara mudah oleh $W_t = \mathbf{N}_{i,t} P_{i,t} = \mathbf{N}'_t \, P_t$. Jika diasumsikan bahwa komposisi portofolio adalah konstan dari t ke $t+1$, perubahan dalam nilai pasar dari portofolio diberikan oleh $W_{t+1} - W_t = \mathbf{N}'_t \, (P_{t+1} - P_t)$. Jadikan $(W_{t+1} - W_t) / W_t = \boldsymbol{\alpha}'_t \, r_{t+1} = r_{p,t+1}$, di mana $\boldsymbol{\alpha}'_t = \mathbf{N}'_{i,t} \, P_{i,t} / (\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}'_{i,t} \, P_{i,t} \right)$. Nyatakan kekayaan investor untuk suatu vektor bobot portofolio $\boldsymbol{\alpha}_t$ sebagai $W_t(\alpha_t)$.

2.1 *Value at Risk*

Jika dinyatakan $\Delta W_{t+1}(\alpha_t) = W_{t+1}(\alpha_t) - W_t(\alpha_t)$ VaR suatu portofolio didefinisikan oleh hubungan

$$\theta = P[\Delta W_{t+1}(\alpha_t) \le -\overline{VaR}_{\theta,t} \mid \mathcal{F}_t\,], \tag{2.1}$$

di mana $\mathcal{F}_t$ menyatakan himpunan informasi pada waktu t. Secara alternatif, diperoleh

$$\theta = P\left[\frac{\Delta W_{t+1}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \le -\frac{\overline{VaR}_{\theta,t}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \mid \mathcal{F}_t\right] = P[r_{p,t+1} \le VaR_{\theta,t} \mid \mathcal{F}_t], \tag{2.2}$$

di mana $VaR_{\theta,t}(r_{p,t+1}) = \overline{VaR}_{\theta,t} / W_t(\alpha_t)$ menyatakan VaR untuk probabilitas θ dan untuk Rp1,- yang diinvestasikan. Jika didefinisikan juga *cdf* bersyarat $F_{p,t}(x) = P[r_{p,t} \le x \mid \mathcal{F}_{t-1}]$, dengan $F_{p,t}^{-1}$ invers dari *cdf* bersyarat, jelas bahwa

$$VaR_{\theta,t} = -F_{p,t}^{-1}(\theta) \tag{2.3}$$

Bentuk ini mengindikasikan bahwa VaR portofolio pada waktu t untuk periode selanjutnya adalah (minus) θ-*quantile* dari *cdf* bersyarat dari *return* portofolio. Secara nyata, jika diasumsikan *return* adalah *iid*, VaR adalah konstan sepanjang waktu dan mudah diberikan oleh invers dari *cdf* tak bersyarat: $VaR_\theta = -F_\theta^{-1}(\theta)$, di mana $F_p(x) = P[r_{p,t} \le x]$ *cdf return* portofolio (diasumsikan kontinu). Oleh karena itu, menghitung VaR adalah mengestimasi *quantile* distribusi bersyarat dari *return* portofolio.

Secara umum, VaR dihitung sepanjang horizon waktu k (10 hari, dan seterusnya). Diasumsikan posisi konstan sepanjang horizon, definisi VaR untuk multi-periode k adalah

$$\theta = P\left[\frac{\Delta W_{t+k}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \le -\frac{\overline{VaR}_{\theta,t+k}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \mid \mathcal{F}_t\right] = P[r_{p,t+k}[k] \le VaR_{\theta,t+k}], \tag{2.4}$$

di mana $r_t[k]$ *return* komulatif antara waktu t dan $t+k$, dan didefinisikan VaR untuk 1rp yang diinvestasikan sebagai $VaR_{\theta,t:t+k} = \overline{VaR}_{\theta,t:t+k} / W_t(\alpha_t)$. Untuk mendapatkan VaR multi-periode, diperlukan mengestimasi distribusi bersyarat dari *return* portofolio multi-periode $r_{p,t}[k]$.

2.2 Ukuran Risiko *Coherent*

Artzner et al. (1997, 1999) memperkenalkan himpunan kondisi ukuran risiko *coherent* jika memenuhi.

Definisi: Misalkan V adalah suatu himpunan variabel acak bernilai real (mencirikan, kekayaan akhir bersih). Fungsi $\rho : V \to \mathcal{R}$ adalah suatu ukuran risiko *coherent* jika memenuhi:

1. *Translation invariance:* $X \in V, \alpha \in \mathcal{R}$, maka $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$.
2. *Sub-additivity:* $X, Y \in V$, maka $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$.
3. *Positive homogeneity:* $X \in V, \lambda \ge 0$, maka $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
4. *Monotonicity:* $X, Y \in V$, dengan $X \le Y$, maka $\rho(X) \ge \rho(Y)$.

Translation invariance; berarti jika ditambah jumlah tertentu α pada posisi, ini akan menurunkan ukuran risiko sebesar α. *Sub-additivity;* mengakibatkan risiko portofolio disusun dari dua sub-portofolio adalah lebih kecil dari jumlah risiko dua sub-portofolio. *Positive homogeneity;* berarti jika ukuran portofolio ditingkatkan dengan faktor λ dan dengan bobot sama, akan menurunkan ukuran risiko dengan faktor sama λ. *Monotonicity;* berarti risiko lebih besar untuk kejadian acak negatif.

Berdasarkan sifat-sifat di atas, menunjukkan bahwa VaR tidak memenuhi ukuran risiko coherent, sebab tidak memenuhi sifat sub-additivity. Sehingga diversifikasi tidak selalu memperkecil risiko yang diukur dengan VaR. Secara konsekuensi, ukuran ini bisa mengakibatkan variansi resiko yang lebih besar dalam keadaan kasus harga pasar turun.

2.3 *Expected Shortfall*

Untuk mengatasi persoalan VaR sebagai ukuran risiko tak *coherent*, Artzner et al. (1999) dan Basak dan Shapiro (2001) memperkenalkan penggunaan apa yang disebut *Expected Shortfall* (ES) sebagai alternatif ukuran risiko. ES adalah nilai ekspektasi kerugian dari portofolio (dalam $\theta\%$) dalam kasus terburuk sepanjang horizon waktu, diberikan oleh

$$\overline{ES}_{\theta,t} = -E[\Delta W_{t+1}(\alpha_t) \mid \Delta W_{t+1}(\alpha_t) \leq -\overline{VaR}_{\theta,t}], \tag{2.5}$$

Secara alternatif, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \overline{ES}_{\theta,t} &= \frac{\overline{ES}_{\theta,t}}{W_t(\alpha_t)} = -E\left[\frac{\Delta W_{t+1}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \mid \frac{\Delta W_{t+1}(\alpha_t)}{W_t(\alpha_t)} \leq -VaR_{\theta,t}\right] \\ &= -E[r_{p,t} \mid r_{p,t} \leq -VaR_{\theta,t}], \end{aligned} \tag{2.6}$$

di mana $ES_{\theta,t}$ menyatakan ES untuk probabilitas θ untuk 1rp yang diinvestasikan.

Kegunaan utama ES untuk alokasi aset adalah sebagai berikut: (i) ES adalah ukuran risiko *coherent*, sebab memenuhi sifat sub-additivity dan secara konsekuensi dapat memperkecil risiko dengan diversifikasi; (ii) ES mengontrol secara langsung risiko dalam tail kiri dari suatu distribusi, sehingga kerugian ekstrem secara eksplisit diberikan ke *account* dalam proses alokasi.

3. MODEL OPTIMASI PORTOFOLIO

Secara esensial, dua tipe penyelesaian yang akan dianjurkan. Pertama yang diperhatikan ukuran rata-rata – variansi tetapi asumsikan pendambahan pembatasan dikira pada laporan untuk risiko *downside*, kemudian pendekatan ke dua dirilis atas suatu minimasi langsung dari keterlambatan.

3.1 *Lower-Partial-Moment*

Definisi

Isu penting pertama, sesudah melaksanakan alokasi portofolio di bawah risiko downside, adalah mendefinisikan kelas ukuran risiko downside. Suatu definisi sangat jelas telah dimuat dalam Berkelaar dan Kouwenberg (2000). Risiko downside secara langsung dihubungkan pada yang disebut momen parsial-rendah (lower-partial moment, LPM) diperkenalkan oleh Bawa dan Lindenberg (1977). LPM tingkat γ untuk suatu sasaran yang diberikan θ adalah diberikan oleh

$$R_{\gamma}(\theta) = E[(\max(\theta - r_p, 0))^{\gamma}] = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - r)^{\gamma}\, dF_r(x), \quad \gamma \geq 0 \tag{2.7}$$

di mana $F_r(x)$ adalah *cdf* dari pendapatan portofolio r_p. Yang menarik, kelas momen ini beberapa lindungan yang diketahui sebagai ukuran risiko. Bilamana $\gamma = 0$, kita amati bahwa $R_0(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} dF_r(x)$, juga bahwa, jika dinotasikan dengan $\theta(q)$, VaR untuk probabilitas q, didapatkan $R_0(\theta(q)) = q$. Dalam kasus ini, θ menunjukkan presentil ke-q. Jika $\gamma = 1$, $R_1(\theta)$ dapat diinterpretasikan sebagai *expected shorfall* (ES), sebab $ES_{\theta} = E[r_p - \theta \mid r_p \leq \theta]$. Juga, bilamana $\gamma = 2$, didapat yang desebut variansi downside $DV_{\theta} = E[(r_p - \theta)^2 \mid r_p \leq \theta]$.

Sekarang, dua tipe program optimasi adalah dapat diletakkan risiko downside ke dalam laporan (account).

3.2 Optimasi Dengan Penambahan Pembatas

Suatu pendekatan pertama terdiri dalam pemeliharaan ukuran standar rata-rata – variansi, tetapi dengan penambahan pembatasan sedemikian hingga bahwa risiko downside portofolio akan tidak melebihi tingkat yang diberikan. Sebagai contoh, Alexander dan Baptista (2004) fokus pada program optimasi sebagi berikut

$$\max_{\{\alpha\}} \; r_p - \lambda\sigma_p^2, \text{ dengan } ES_{\theta} \leq L \tag{2.8}$$

di mana λ menyatakan parameter penghindar risiko dan L batas pada ES. Mereka meniru suatu pendekatan parametrik untuk penyelesaian program ini, mengasumsikan suatu distribusi tertentu untuk pendapatan aset. Dalam fakta, mereka menunjukkan bahwa untuk distribusi normal (atau student-t) multivariat, penyamaan $ES_{\theta} = L$ adalah diberikan dengan suatu garis dalam bidang (σ_p, μ_p). Konsekuensinya, bergantung pada probabilitas (atau tingkat kepercayaan) θ dan batas L. Dalam kenyataan, pengaruh pembatas demikian adalah berarti-dua dibandingkan dengan garis dasar tanpa pembatas ukuran rata-rata – variansi., sebab deviasi standar portofolio boleh secara nyata meningkat di bawah beberapa pembatas ES. Dalam fakta bilamana investor adalah penghindar-risiko tinggi dan memilih batas L adalah juga kecil.

3.3 Risiko Downside Untuk Pengukuran Optimisasi

Dalam pendekatan ke dua, fungsi utilitas adalah secara langsung didefinisikan dalam suku-suku risiko downside, malahan variansi. Untuk contoh, Berkelaar dan Kouwenberg (2000) memperhatikan kasus

$$\max_{\{\alpha\}} \; r_p - \lambda R_\gamma(\theta) \tag{2.9}$$

di mana $\theta \to \infty$ dan $\gamma = 2$, kita ambil ukuran rata-rata – variansi. Bilamana, $\gamma = 1$, kita ambil ukuran rata-rata - ES, dan seterusnya.

Krokhmal, Palmquist, dan Uryasev (2002) jalan lain berikut. Pertama, mereka mendefinisikan kembali ES dalam suku-suku harga portofolio sebagai berikut

$$\overline{ES}_{\theta,t} = -E[W_{t+1}(w_t) \mid W_{t+1}(w_t) \leq -\overline{VaR}_\theta] = -\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{-\overline{VaR}_\theta} x f_P(x) dx$$

$$= \overline{VaR}_\theta - \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{-\overline{VaR}_\theta} (x + \overline{VaR}_\theta) f_P(x) dx \tag{2.10}$$

di mana VaR diasumsikan pada bilangan positif. Maka, menggunakan skenario (misalnya *historical simulations*), mereka mendapatkan estimasi linier berikut

$$\hat{ES}_{\theta,t} = \overline{VaR}_\theta - \frac{1}{\theta J} \sum_{j=1}^{J} \pi_j (x_j + \overline{VaR}_\theta) \tag{2.11}$$

di mana π_j, $j = 1,...,J$, adalah probabilitas skenario j dan $\{x_j\}_{j=1}^{J}$ adalah suatu himpunan harga-harga yang disimulasikan tarikan dari distribusi empiris. Maka, mereka definisikan persoalan optimisasi sebagai

$$\max_{\{\alpha, \overline{VaR}_\theta\}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_t[p_{i,t+1}], \tag{2.12}$$

dengan

$$\overline{VaR}_\theta - \frac{1}{\theta J} \sum_{j=1}^{J} \pi_j (x_j + \overline{VaR}_\theta) \leq \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{i,t}^0, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{i,t}^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{i,t} + \text{biaya transaksi} \tag{2.14}$$

Persoalan ini secara jelas adalah pemrograman linier. Ini memberikan kita portofolio optimal dengan vektor bobot α_t^* dan VaR optimal $(\overline{VaR_\theta^*})$. Keuntungan utama dari pendekatan ini adalah bahwa ini adalah non-parametrik, sehingga ES dihitung tanpa mengandalkan asumsi distribusi.

Suatu pendekatan akhir yang dapat dianjurkan dalam konteks demikian adalah didasarkan pada suatu pemodelan bersyarat (parametrik) dari pendapatan aset. Asumsikan untuk contoh bahwa pendapatan portofolio adalah ditarik dari suatu distribusi Student-t dengan parameter derajat kebebasan ν. Maka, ES diberikan oleh

$$ES_{\theta,t} = \frac{1}{\theta}\frac{\nu-2}{\nu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{\tilde{q}_{\theta}^{2}}{\nu-2}\right)\times\sigma_t(1)-\mu_t(1) \quad (2.15)$$

di mana $\tilde{q}_{\theta} = t_{\nu}^{-1}(\theta)$ adalah kuantil untuk suatu probabilitas kerugian sama dengan θ dari distribusi t standar, dan $\mu_t(1)$ dan $\sigma_t(1)$ adalah pendapatan harapan dan volatilitas untuk waktu $t+1$. Maka, portofolio optimal di bawah tujuan ES adalah didapat dengan menyelesaikan persoalan maksimasi

$$\max_{\{\alpha\}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_t[r_{i,t+1}],\text{ dengan } ES_{\theta} \leq L. \quad (2.16)$$

Catatan bahwa pendekatan ini memerlukan penghitungan-kembali di setiap tahapan j algoritma optimasi pendapatan portofolio sebagai fungsi vektor bobot baru $\alpha_t^{(j)}$.

4. KESIMPULAN

Value at Risk bukan merupakan alat ukur risiko yang keherent, sebab tidak memenuhi sifat *sub-additivity*. *Expected Shortfall* dikembangkan untuk mengatasi kelemahan *Value at Risk.* Optimasi alokasi aset portofolio dapat dilakukan bergantung pada preferensi investor terhadap risiko. Optimasi alokasi aset portofolio di bawah risiko *downside* meliputi dua pendekatan, yaitu optimasi dengen penambahan pembatas, dan optimasi langsung risiko *downside*. Dalam optimasi dengan penambahan pembatas, tetap menggunakan kerangka dasar ukuran standar rata-rata – variansi, tetapi dengan penambahan pembatasan sedemikian hingga bahwa risiko downside portofolio akan tidak melebihi tingkat yang diberikan. Sedangkan optimasi langsung risiko *downside,* fungsi utilitas secara langsung didefinisikan dalam suku-suku risiko downside, dan juga variansi.

DAFTAR PUSTAKA

Denuit, D., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. & Laeven, R. (2005). Risk Measurement With Equivalent Utility Principles. (*Download dari internet Januari 2007*).

Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement.* New Delhi, India : John Wiley & Sons, LTD.

Hallerbach, W.G. & Menkveld, A.J. (2001). Analyzing Perceived Downside Risk: the Component Value-at-Risk Framework. *Paper on Line.* Download 6 Oktober 2008.

Jondeau, E., Poon, SH. & Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distribution.* London : Springer-Verlag.

Jorion, P. (2002). *Value at Risk* : The New Benchmark for Managing Financial Risk. Second Edition. Singapore : McGraw-Hill Co.

Ruppert, D. (2004). *Statistics and Finance* : An Introduction. New York : Springer-Verlag.