

PENDEKATAN *HIERARCHICAL BAYES SMALL AREA ESTIMATION* (HB SAE) DALAM MENGESTIMASI ANGKA MELEK HURUF KECAMATAN DI KABUPATEN INDRAMAYU

Ari Shobri B¹⁾, Septiadi Padmadisastra²⁾, Sri Winarni³⁾

¹⁾Mahasiswa Program Magister Statistika Terapan Universitas Padjadjaran

²⁾Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran

³⁾ Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran

Jl. Dipati Ukur 35 Bandung

Email : ¹⁾ari.shobri@gmail.com, ²⁾s.padmadastra@unpad.ac.id, ³⁾sri.winarni@unpad.ac.id

Abstrak

Era otonomi daerah seperti saat ini mendorong pemerintah daerah untuk memiliki informasi hingga pada area kecil. Salah satu indikator pokok bagi pemerintah daerah adalah Indeks Pembangunan Manusia (IPM). IPM dihitung oleh BPS setiap tahunnya hingga tingkat kabupaten/kota. Penghitungan IPM hingga tingkat kecamatan tidak bisa dilakukan secara langsung oleh BPS karena kurangnya sampel. Salah satu cara untuk menaksir IPM pada domain kecil adalah melalui pendugaan tidak langsung dengan pendekatan *Small Area Estimation* (SAE). Salah satu model SAE yang dapat digunakan adalah model *Hierarchical Bayes* (HB). Model HB memiliki kelebihan dibandingkan dengan model SAE lainnya, diantaranya adalah dihasilkannya MSE yang lebih rendah. Selain itu, HB juga sesuai untuk menangani variabel respon yang bersifat diskret seperti Angka Melek Huruf.

Penelitian ini bertujuan untuk menaksir salah satu komponen IPM yang bersifat diskret yaitu Angka Melek Huruf melalui pendekatan *Hierarchical Bayes Small Area Estimation* (HB SAE) di Kabupaten Indramayu. Parameter yang ditaksir berbentuk proporsi. Hasil penelitian diperoleh nilai varians posterior HB SAE lebih kecil dari varians estimasi langsung. Hal ini mengindikasikan bahwa model HB SAE lebih baik dibandingkan pendugaan langsung dalam menaksir Angka Melek Huruf. Produk lain yang dihasilkan melalui model HB-SAE adalah taksiran parameter β yang dapat digunakan untuk membangun model regresi dalam menaksir proporsi penduduk melek huruf di suatu kecamatan di Kabupaten Indramayu.

Kata Kunci : *Hierarchical Bayes*, Angka Melek Huruf, *Small Area Estimation*

I. PENDAHULUAN

Sebagaimana diatur dalam Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 32 Tahun 2004 Tentang Pemerintahan Daerah, setiap pemerintahan daerah memiliki kewenangan untuk mengelola daerahnya. Hal ini kemudian dikenal sebagai otonomi daerah. Konsekuensi dari otonomi daerah adalah dibutuhkannya informasi mengenai wilayah yang tidak hanya sampai pada tingkat kabupaten/kota tetapi juga hingga domain yang lebih kecil seperti kecamatan atau kelurahan. Salah satu indikator yang menjadi fokus perhatian pemerintah daerah adalah Indeks Pembangunan Manusia (IPM). IPM merupakan indeks komposit yang memberikan gambaran mengenai dimensi kesehatan, pendidikan dan daya beli masyarakat di suatu wilayah.

Selama ini, penghitungan IPM di Indonesia dilakukan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) dengan menggunakan data hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) yang

dirancang untuk menghasilkan estimasi hingga tingkat kabupaten/kota. Dengan demikian, data hasil survei tersebut tidak dapat digunakan untuk melakukan estimasi pada area yang lebih kecil seperti kecamatan dan kelurahan. Hal ini dikarenakan jumlah sampel yang tidak lagi memadai untuk melakukan estimasi pada area kecil tersebut. Jika tetap dilakukan estimasi maka akan dihasilkan statistik yang memiliki varians yang besar dan informasi menjadi tidak lagi representatif.

Salah satu upaya yang dilakukan untuk memperoleh taksiran parameter area kecil adalah melakukan penambahan sampel, namun dengan sumber daya yang lebih besar dalam hal biaya dan waktu. Upaya lain yang dapat dilakukan adalah dengan mengoptimalkan data yang tersedia dengan menggunakan metode pendugaan area kecil-*Small Area Estimation* (SAE). Teknik pendugaan ini memanfaatkan data dari domain besar untuk menduga parameter pada domain yang lebih kecil (Rao, 2003).

Metode SAE yang populer diperkenalkan dalam Ghosh dan Rao (1994) yaitu model *Empirical Best Linier Unbiased Prediction (EBLUP)*, *Empirical Bayes (EB)* dan *Hierarchical Bayes (HB) Estimation*. Pendugaan model Bayes seperti EB dan HB telah mulai banyak digunakan untuk melakukan pendugaan area kecil. Namun pada umumnya masih difokuskan pada data yang bersifat kontinu seperti pengeluaran perkapita yang merupakan salah satu komponen penyusun IPM. Pengembangan model area kecil berbasis Bayes dilakukan pada data diskret seperti data biner atau data cacahan. Metode berbasis Bayes seperti EB dan HB dianggap tepat untuk digunakan pada data diskret dibandingkan dengan EBLUP yang memang dirancang untuk menangani data kontinu.

Salah satu data yang bersifat diskret pada komponen IPM adalah Angka Melek Huruf yang berbentuk proporsi atau data biner. Dengan demikian metode area kecil berbasis bayes seperti *Hierarchical Bayes* tepat untuk menduga variabel tersebut. Model *Hierarchical Bayes* dinilai lebih menguntungkan serta mempunyai kuadrat tengah galat (*Mean Square Error/MSE*) yang lebih kecil dibandingkan dengan metode BLUP (Ghosh dan Rao, 1994). Keuntungan lainnya dari model tersebut adalah: (1) spesifikasi modelnya adalah langsung dan dapat digunakan untuk memodelkan berbagai sumber variasi yang berbeda, (2) masalah inferensinya relatif lebih jelas dan komputasinya juga relatif lebih mudah dengan menggunakan teknik MCMC (Hajarisman, 2013).

Kembali pada konteks IPM, Pemerintah Daerah Provinsi Jawa Barat memiliki motivasi yang besar dalam meningkatkan IPM. Salah satu indikasinya adalah dengan dianggarkan dana sejumlah ratusan miliar untuk Program Pendanaan Kompetensi Indeks Pembangunan Manusia (PPK-IPM). Dana tersebut kemudian digulirkan kepada daerah yang kinerja

pembangunan manusianya masih rendah. Dari sisi pendidikan, khususnya pada variabel Angka Melek Huruf, Kabupaten Indramayu menduduki peringkat terakhir di Provinsi Jawa Barat (peringkat ke-26) dan tidak berubah selama bertahun-tahun. Pada tahun 2011, AMH Kabupaten Indramayu hanya sebesar 85,66 padahal Kabupaten Cirebon yang menduduki peringkat ke-25 telah mencapai angka 92,41.

Dengan kelebihan yang dimiliki oleh model *Hierarchical Bayes (HB) SAE* maka menarik untuk dilakukan kajian pendugaan AMH area kecil di Kabupaten Indramayu. Kegunaan informasi tersebut diantaranya untuk menentukan kantong-kantong melek huruf rendah di Kabupaten Indramayu. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibahas mengenai bagaimana penggunaan model HB dalam melakukan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*) terhadap variabel Angka Melek Huruf pada setiap kecamatan di Kabupaten Indramayu.

II. METODE HIERARCHICAL BAYES DALAM PENDUGAAN PROPORSI

2.1 Model *Small Area*

Terdapat dua ide utama yang digunakan dalam SAE, yaitu pertama, asumsi bahwa keragaman di dalam area kecil variabel respon dapat diterangkan seluruhnya oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut model pengaruh tetap (*fixed effect model*). Kedua, asumsi keragaman spesifik area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan yang disebut pengaruh acak area kecil (*random effect*). Gabungan antara kedua model diatas membentuk model campuran (*mixed model*) (Rao, 2003).

SAE dikelompokkan menjadi dua jenis model dasar yaitu model level area dasar (*basic area level model*) dan model level unit dasar (*basic area level model*) (Rao 2003).

a. **Model berbasis area level** merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang diasumsikan mempunyai hubungan dengan y_i (Rao, 2003). Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model :

$$\hat{\theta}_i = x_i^T \beta + z_i v_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

dimana m adalah area ke- i dengan β merupakan vektor koefisien regresi untuk data pendukung x_i dan v_i berdistribusi independen $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ sebagai pengaruh acak area spesifik yang diasumsikan berdistribusi normal.

Estimator θ_i , dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model estimator langsung $\hat{\theta}_i$ telah tersedia yaitu:

$$\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

Dengan $e_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ dan σ_ε^2 diketahui.

Jika model (2.1) dan (2.2) digabungkan maka akan menghasilkan model gabungan (*mixed model*):

$$\hat{\theta}_i = x_i^T \beta + z_i v_i + e_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

b. **Model berbasis unit level** yaitu suatu model dimana data-data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misal $x_i = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^T$, sehingga dapat dibangun suatu model regresi tersarang:

$$y_{ij} = x_{ij}^T \beta + v_i + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, N_i \quad (2.4)$$

dimana j adalah banyaknya rumah tangga pada area ke- i dengan

$$v_i \sim N(0, \sigma_u^2) \text{ dan } e_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

2.2 Model Hierarchical Bayes (HB)

Dalam pendekatan HB, estimasi parameter area kecil ditaksir melalui sebaran posterior $f(\mu|y)$. Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan sebaran prior subjektif $f(\theta)$ pada parameter model θ , kemudian untuk gugus data y tertentu akan diperoleh sebaran posterior $f(\mu|y)$ dari parameter area kecil (acak) μ yang diamati. Model dua-tahap, katakan $f(y|\mu, \theta_1)$ dan $f(y|\mu, \theta_2)$ dikombinasikan dengan prior subjektif pada $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)$, dengan menggunakan teorema Bayes, sehingga diperoleh posterior $f(\mu|y)$. Inferensi yang berdasarkan pada $f(\mu|y)$, secara khusus pada suatu parameter yang diamati, sebut saja $\phi = h(u)$, diduga dengan menggunakan rata-rata posteriornya sebagaimana yang ditunjukkan dalam Persamaan:

$$E_{\theta|y}(\theta) = \mu(y) = \mu \quad (2.5)$$

serta ragam posterior yang dinyatakan dalam Persamaan:

$$V_{\theta|y}(\theta) = E_{\theta|y}[\theta - E_{\theta|y}(\theta)]^2 \quad (2.6)$$

2.3 Model Hierarchical Bayes (HB) Pada Data Biner

Pendugaan angka melek huruf setiap kecamatan (area- i) pada penelitian ini menggunakan pendekatan bayes berhirarki dengan model **Logit-Normal** dan variabel bebas berbasis area. Rao (2003) mendefinisikan model tersebut sebagai:

- i. $y_i | p_i \sim \text{ind Binomial}(n_i, p_i)$
- ii. $\theta = \text{logit}(p_i) = X_i' \beta + v_i, v_i \sim N_m(0, \sigma_v^2)$
- iii. β dan σ_v^2 saling bebas, $f(\beta) \propto 1$
 $\frac{1}{\sigma_v^2} \sim \text{gamma}(a, b); a \geq 0, b > 0$ (2.7)

Model (i) merupakan distribusi sampel variabel melek huruf pada data Susenas. p_i adalah proporsi penduduk melek huruf yang akan ditaksir pada penelitian ini dengan menggunakan fungsi hubung logit pada model (ii). Untuk melakukan penaksiran proporsi (p_i) perlu ditaksir terlebih dahulu parameter dari β dan σ_v^2 . Distribusi prior yang tepat untuk σ_v^2 adalah *Invers Gamma* dengan parameter a dan b yang ditentukan.

Proporsi penduduk melek huruf pada Model *Hierarchical Bayes* akan ditaksir sebagai mean $E(p_i | y)$ dengan varians $V(p_i | y)$ dari distribusi posterior bersama:

$$f(p_1, \dots, p_m | y) = \int_{\beta} \int_{\sigma_v^2} f(p_1, \dots, p_m, \beta, \sigma_v^2 | y) d\beta d\sigma_v^2 \quad (2.8)$$

Dalam upaya memperoleh sebaran posterior dari bentuk integral multidimensi (2.8), tidak memungkinkan untuk dapat dibentuk persamaan tertutup. Maka solusi alternatif yang dapat digunakan adalah dengan menghitung besaran posterior melalui integrasi numerik. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Ide utama dari MCMC adalah membangun suatu peluang rantai Markov hingga pada akhirnya menuju satu sebaran posterior tertentu. Perhitungan sebaran posterior menghasilkan sampel-sampel besaran posterior. Akhirnya, parameter dari sebaran posterior dapat diduga.

Prosedur MCMC yang terkenal adalah Gibbs bersyarat (*Gibbs Conditionals*). Menurut Rao (2003) bentuk Gibbs bersyarat untuk model logit normal dengan variabel bebas berbasis area adalah:

- i. $[\beta | p, \sigma_v^2, y] \sim N_p[\beta^*, \sigma_v^2 (\sum_{i=1}^m x_i x_i')^{-1}]$
- ii. $[\sigma_v^2 | \beta, p, y] \sim \text{Gamma}[\frac{m}{2} + a, \frac{1}{2} [(\theta - X' \beta)' (\theta - X' \beta)] + b]$ (2.9)
- iii. $f(p_i | \beta, \sigma_v^2, y) \propto h(p_i | \beta, \sigma_v^2) k(p_i)$

Pendugaan parameter β dan σ_v^2 dibangkitkan secara langsung dari (i) dan (ii). Parameter pada bagian (i) persamaan (2.9) dinyatakan oleh:

$$\beta^* = \left(\sum_{i=1}^m x_i' x_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m x_i' \theta_i \right) \quad (2.10)$$

Sementara itu, bagian (iii) persamaan (2.9) dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \text{i. } h(p_i | \beta, \sigma_v^2) &= \frac{\partial \theta_i}{\partial p_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_v^2} [\theta_i - x_i' \beta]^2 \right\} \\ \text{ii. } k(p_i) &= p_i^{y_i} (1 - p_i)^{n - y_i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sesuai dengan persamaan (2.9), β dan σ_v^2 mengikuti distribusi yang standar yaitu *Multivariat Normal* dan *Gamma*. Sehingga nilai kedua parameter tersebut dapat ditaksir melalui pembangkitan sampel acak. Sementara itu, nilai proporsi Bayes berhirarki akan diduga melalui simulasi *gibbs sampling Metropolis-Hasting* (M-H). Sampel Gibbs MCMC dapat dibangkitkan langsung dari (ii) pada persamaan (2.11). Adapun algoritma M-H adalah sebagai berikut:

1. Dibangkitkan $\theta \sim \text{ind } N(X' \beta, \sigma_v^2)$ lalu dicari nilai $p_i^* = g^{-1}(\theta_i)$
2. Dihitung probabilitas penerimaan:

$$r(p_i^{(k)}, p_i^*) = \min \left\{ \frac{k(p_i^*)}{k(p_i^{(k)})}, 1 \right\}; k = 0, 1, \dots, D \quad (2.12)$$

3. Dibangkitkan u dari sebaran seragam (0,1).
4. Dipilih $p_i^{(k+1)} = p_i^*$ jika $u \leq r(p_i^{(k)}, p_i^*)$.
5. Diulangi langkah 3 hingga 5, sampai diperoleh D sampel.

Setelah dilakukan simulasi M-H, maka diperoleh barisan penduga proporsi sebagai berikut:

$$\{p_1^{(k)}, \dots, p_m^{(k)}; k = 1, \dots, D\}$$

Kemudian besaran posterior yang sedang diamati dapat dihitung. Penduga proporsi Bayes berhirarki (p_i^{HB}) adalah

$$p_i^{HB} \approx \frac{1}{D} \sum_{k=d+1}^{d+D} p_i^{(k)} = p_i^{(\cdot)} \quad (2.13)$$

Sedangkan ragam penduga proporsi Bayes berhirarki ($V(p_i^{HB} | \hat{p})$) adalah

$$V(p_i^{HB} | \hat{p}) = \frac{1}{D} \sum_{k=d+1}^{d+D} (p_i^{(k)} - p_i^{(\cdot)})^2 \quad (2.14)$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pendugaan Langsung

Sebelum melakukan pendugaan dengan model HB, dilakukan pendugaan langsung (*direct estimation*) terhadap proporsi melek huruf di setiap kecamatan di Kabupaten Indramayu (p_i). Rumus proporsi dan varians yang digunakan adalah:

$$p_i = \frac{\sum_j y_{ij}}{n_i} = \frac{y_i}{n_i} \quad \text{dan} \quad \widehat{V}(p_i) = \frac{p_i q_i}{n_i - 1} \frac{N_i - n_i}{N_i} \quad ; \quad q_i = 1 - p_i \quad (3.1)$$

dimana y_{ij} adalah status melek huruf penduduk ke- j di kecamatan- i . Dan y_i merupakan jumlah penduduk melek huruf di kecamatan- i . Sementara N_i dan n_i masing-masing menunjukkan jumlah populasi dan sampel di kecamatan- i . Nilai yang diperoleh dalam pendugaan ini akan digunakan sebagai pembanding dengan nilai yang diperoleh dari hasil estimasi HB. Nilai proporsi (3.1) juga digunakan sebagai p_0 dalam proses MCMC-HB.

Jumlah kecamatan di Kabupaten Indramayu adalah sebanyak 31 kecamatan. Hasil pendugaan langsung proporsi beserta variansnya disajikan dalam bentuk vektor berikut:

Proporsi *Direct* = (0.884, 0.652, 0.759, 0.822, 0.825, 0.849, 0.778, 0.667, 0.761, 0.871, 0.649, 0.959, 0.882, 0.894, 0.782, 0.792, 0.786, 0.869, 0.809, 0.974, 0.824, 0.75, 0.967, 0.886, 0.59, 0.889, 0.821, 0.663, 0.712, 0.773, 0.832)

Varians *Direct* = (0.00071, 0.00349, 0.00344, 0.00125, 0.00258, 0.00246, 0.00664, 0.00693, 0.0026, 0.00184, 0.00632, 0.00081, 0.00155, 0.00206, 0.00315, 0.00049, 0.00622, 0.00107, 0.0023, 0.00033, 0.00198, 0.01247, 0.00111, 0.00089, 0.00635, 0.00224, 0.0014, 0.00245, 0.00186, 0.00835, 0.00125)

3.2 Pendugaan Tak Langsung dengan Metode *Hierarchical Bayes Logit Normal*

i. Penentuan Variabel Pendukung

Data yang diteliti adalah data tahun 2011 karena dengan memilih tahun tersebut, estimasi dapat dilakukan dengan “meminjam” kekuatan dari data hasil Pendataan Potensi Desa Tahun 2011 (PODES 2011) sebagai data hasil sensus. Konsep “meminjam” kekuatan dilakukan dengan diikutsertakannya variabel pendukung (*auxiliary variable*) yang berasal dari data PODES 2011. Variabel pendukung tersebut mencakup: 1) Rasio jumlah SD per 10.000 penduduk per kecamatan; 2) Persentase desa dengan kegiatan pemberantasan buta aksara; 3) Rasio jenis kelamin; 4) Rasio Jumlah surat miskin/SKTM yang dikeluarkan desa/kelurahan selama tahun 2010 per 1000 penduduk; 5) Rasio Keluarga Pengguna listrik PLN.

Sebelum variabel pendukung tersebut dimasukkan kedalam model, dilakukan seleksi variabel bebas dengan variabel tak bebas $\text{logit}(p_i)$. Metode yang digunakan adalah

Backward pada model regresi linear. Dengan menggunakan *software* SPSS, *output* yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Pemilihan Variabel Pendukung Berdasarkan Perubahan Nilai R Square

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	.347 ^a	.121	-.055	.34236	.121	.686	5	25	.638
2	.344 ^b	.118	-.017	.33618	-.002	.070	1	25	.794
3	.339 ^c	.115	.016	.33057	-.004	.106	1	26	.747
4	.303 ^d	.092	.027	.32881	-.023	.703	1	27	.409
5	.199 ^e	.040	.006	.33222	-.052	1.605	1	28	.216
6	.000 ^f	.000	.000	.33329	-.040	1.193	1	29	.284

- a Predictors: (Constant), Rasio Keluarga Pengguna listrik PLN, Rasio jenis kelamin, Rasio SD per 10ribu penduduk, Persentase SKTM per jumlah penduduk, Rasio desa dengan kegiatan keaksaraan
- b Predictors: (Constant), Rasio Keluarga Pengguna listrik PLN, Rasio SD per 10ribu penduduk, Persentase SKTM per jumlah penduduk, Rasio desa dengan kegiatan keaksaraan
- c Predictors: (Constant), Rasio Keluarga Pengguna listrik PLN, Rasio SD per 10ribu penduduk, Rasio desa dengan kegiatan keaksaraan
- d Predictors: (Constant), Rasio Keluarga Pengguna listrik PLN, Rasio desa dengan kegiatan keaksaraan
- e Predictors: (Constant), Rasio desa dengan kegiatan keaksaraan
- f Predictor: (constant)

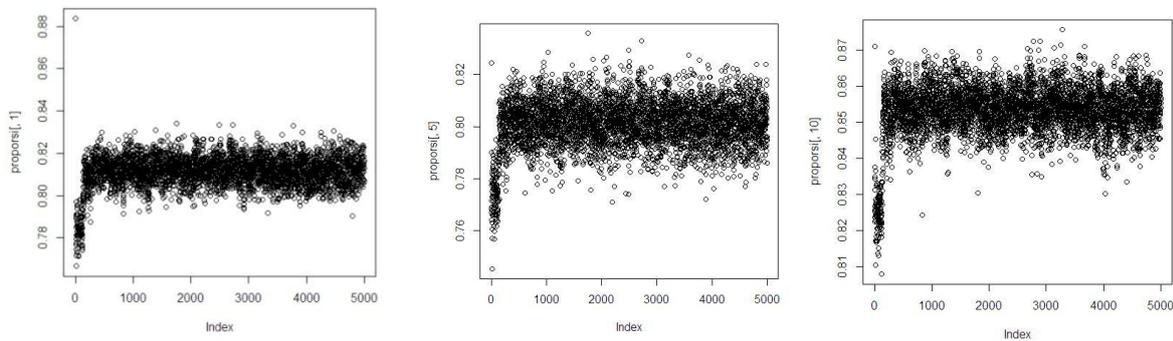
Tabel *output* diatas menunjukkan bahwa *R Square* model yang menghubungkan nilai logit dengan variabel bebas tidak cukup baik karena nilainya yang kecil. Selain karena lemahnya korelasi, kondisi ini juga bisa disebabkan karena relatif kecilnya jumlah observasi dalam model. Penyebab lain yang mungkin adalah rendahnya akurasi variabel logit yang berasal dari data survey dengan tingkat estimasi hanya sampai level kabupaten/kota. Jika model tetap digunakan, maka variabel rasio jenis kelamin dan Persentase SKTM per jumlah penduduk dapat dieleminasi karena penghapusan kedua variabel tersebut hanya menyebabkan perubahan *R Square* yang sangat kecil.

ii. Model *Hierarchical Bayes* Logit Normal

Sebagaimana telah dibahas pada bab sebelumnya, model HB logit normal digunakan untuk mengestimasi nilai p_i dengan terlebih dahulu menduga β dan σ_v^2 melalui pendekatan MCMC dengan algoritma Gibbs Sampling dan algoritma Metropolis-Hasting. Langkah pertama adalah menentukan nilai awal parameter secara subjektif yaitu $\sigma_v^2 = 1$ dan p_1 adalah proporsi pendugaan langsung. Parameter distribusi gamma(a,b) ditetapkan sebesar a=b=0,01. Selanjutnya, variabel bebas (x_i) dan y juga di-*input*-kan kedalam model.

Setiap kali proses iterasi dilakukan, diperoleh nilai baru ke-k untuk masing-masing parameter yang diestimasi yaitu $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, dan σ_v^2 , serta proporsi p_1 sampai dengan p_{31} . Algoritma MCMC pada penelitian ini dilakukan sebanyak 5000 iterasi. Nilai dugaan

parameter diperoleh dari rata-rata nilai setelah rantai markov stasioner. Berikut ditampilkan proses iterasi dari beberapa parameter posterior proporsi:



Gambar 3.1 Grafik taksiran parameter p_1^{HB} , p_5^{HB} , p_{10}^{HB}

Gambar 3.1 merupakan contoh proses iterasi pada pendugaan proporsi setiap kecamatan. Terlihat pada gambar tersebut bahwa nilai dugaan secara perlahan bergerak dari p_0 menuju kondisi yang stasioner. Kondisi stasioner tampak tercapai pada sekitar iterasi ke-500. Untuk memperoleh nilai dugaan yang lebih *smooth*, nilai dugaan proporsi dihitung dari iterasi ke-1001 hingga iterasi ke-5000 dengan rumus (2.13) dan variansnya dengan menggunakan rumus (2.14). Hasil pendugaan proporsi tersebut dibandingkan dengan hasil pendugaan langsung adalah:

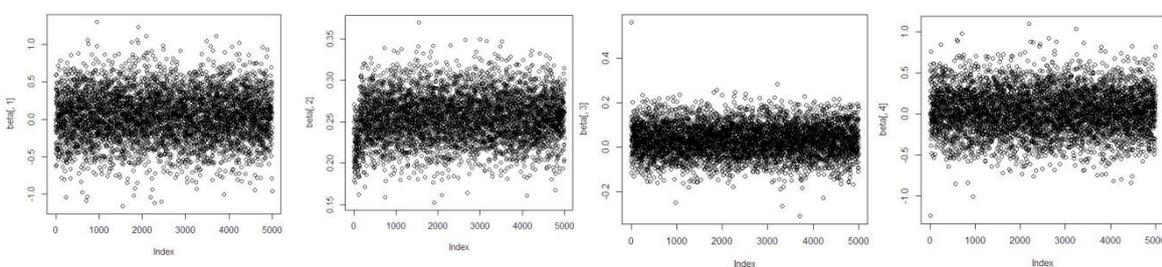
Tabel 3.2 Perbandingan Estimasi Proporsi *Direct Estimation* dan *Hierarchical Bayes*

i	Nama Kecamatan	Taksiran proporsi		Varians proporsi	
		pendugaan langsung	HB	pendugaan langsung	HB
1	Haurgeulis	0,884	0,813	0,00071	$3,98 \times 10^{-5}$
2	Gantar	0,652	0,792	0,00349	$6,61 \times 10^{-5}$
3	Kroya	0,759	0,791	0,00344	$1,51 \times 10^{-4}$
4	Gabuswetan	0,822	0,843	0,00125	$2,35 \times 10^{-5}$
5	Cikedung	0,825	0,802	0,00258	$6,52 \times 10^{-5}$
6	Terisi	0,849	0,835	0,00246	$4,31 \times 10^{-5}$
7	Lelea	0,778	0,859	0,00664	$4,07 \times 10^{-5}$
8	Bangodua	0,667	0,855	0,00693	$2,45 \times 10^{-5}$
9	Tukdana	0,761	0,889	0,0026	$4,07 \times 10^{-5}$
10	Widasari	0,871	0,854	0,00184	$3,05 \times 10^{-5}$
11	Kertasemaya	0,649	0,852	0,00632	$2,30 \times 10^{-5}$
12	Sukagumiwang	0,959	0,876	0,00081	$4,10 \times 10^{-5}$
13	Krangkeng	0,882	0,68	0,00155	0,00000
14	Karangampel	0,894	0,838	0,00206	$3,22 \times 10^{-5}$
15	Kedokan Bunder	0,782	0,805	0,00315	$4,96 \times 10^{-5}$
16	Juntinyuat	0,792	0,858	0,00049	$3,76 \times 10^{-5}$

i	Nama Kecamatan	Taksiran proporsi		Varians proporsi	
		pendugaan langsung	HB	pendugaan langsung	HB
17	Sliyeg	0,786	0,843	0,00622	$2,42 \times 10^{-5}$
18	Jatibarang	0,869	0,869	0,00107	$4,24 \times 10^{-5}$
19	Balongan	0,809	0,836	0,0023	$2,35 \times 10^{-5}$
20	Indramayu	0,974	0,974	0,00033	0,00000
21	Sindang	0,824	0,819	0,00198	$3,11 \times 10^{-5}$
22	Cantigi	0,75	0,861	0,01247	$3,23 \times 10^{-5}$
23	Pasekan	0,967	0,967	0,00111	0,00000
24	Lohbener	0,886	0,832	0,00089	$2,75 \times 10^{-5}$
25	Arahan	0,59	0,845	0,00635	$4,84 \times 10^{-5}$
26	Losarang	0,889	0,656	0,00224	0,00000
27	Kandanghaur	0,821	0,793	0,0014	$6,20 \times 10^{-5}$
28	Bongas	0,663	0,659	0,00245	0,00000
29	Anjatan	0,712	0,809	0,00186	$3,41 \times 10^{-5}$
30	Sukra	0,773	0,817	0,00835	$3,70 \times 10^{-5}$
31	Patrol	0,832	0,773	0,00125	$1,47 \times 10^{-4}$

Dari tabel 3.2 diatas terlihat bahwa penaksiran menggunakan model HB memberikan varians yang lebih kecil dibandingkan dengan varians dari pendugaan langsung. Nilai taksiran proporsi HB bervariasi, beberapa diantaranya lebih tinggi dibandingkan nilai pendugaan langsung dan beberapa lainnya lebih rendah. Uniknya, terdapat nilai taksiran yang sama pada beberapa kecamatan yaitu Jatibarang, Indramayu, dan Pasekan. Pada Kecamatan Indramayu misalnya, iterasi pada MCMC telah konvergen sejak awal proses hingga akhir proses.

Selain taksiran nilai proporsi melek huruf per kecamatan, proses MCMC menghasilkan *output* lain berupa parameter β dan σ_v^2 . Iterasi β sebanyak 5000 kali ditunjukkan pada gambar 3.2.



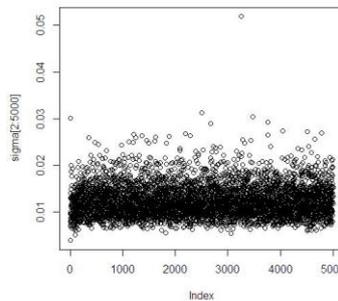
Gambar 3.2 Grafik taksiran parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, dan β_3

Berbeda dengan proses iterasi parameter dugaan proporsi, iterasi parameter β menunjukkan kondisi yang relatif stasioner sejak awal proses iterasi hingga iterasi ke-5000. Jika nilai β pada iterasi ke-1001 s.d. iterasi ke 5000 dirata-ratakan maka diperoleh nilai

taksiran β yaitu $\beta_0= 0.04399627$; $\beta_1=0.25606946$; $\beta_2=0.03084749$; $\beta_3=0.02935228$. Dengan demikian, dapat dibangun persamaan regresi pendugaan proporsi penduduk melek huruf kecamatan i di Kabupaten Indramayu berikut:

$$\text{logit } p_i = 0.04399627+0.25606946x_{i1}+0.03084749x_{i2}+0.02935228x_{i3} \quad (3.2)$$

Pada parameter taksiran σ_v^2 , proses MCMC menghasilkan nilai σ_v^2 yang relatif konvergen sejak iterasi pertama seperti ditunjukkan pada gambar 3.3. Taksiran σ_v^2 dengan pendekatan HB adalah sebesar 0.01247251.



Gambar 3.3 Grafik taksiran parameter σ_v^2

IV. KESIMPULAN

Pendugaan area kecil terhadap komponen IPM seperti angka melek huruf merupakan sebuah tuntutan pada era otonomi daerah ini. Permasalahan sampel kecil pada Susenas dalam menduga parameter area kecil dapat diatasi tanpa harus melakukan penambahan sampel. Salah satu caranya adalah dengan penggunaan model *Hierarchical Bayes Small Area Estimation* (HB-SAE). Dengan menggunakan variabel bebas dari data PODES 2011, taksiran parameter dengan metode HB menunjukkan hasil yang lebih baik dari sisi keragaman dibandingkan dengan hasil taksiran *direct estimation*. Hal ini ditunjukkan oleh variansi posterior pada metode HB yang lebih kecil dibandingkan dengan variansi dari *direct estimation*.

Direct estimation pada kajian ini menghasilkan taksiran yang cenderung tidak akurat karena hanya mengacu pada data Susenas yang jumlah sampelnya tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan tingkat kecamatan. Sementara itu, HB pada penelitian ini menggunakan variabel pendukung yang berasal dari data sensus. Poin yang menjadi permasalahan dalam hal ini adalah sulitnya memperoleh variabel pendukung yang memiliki hubungan yang kuat dengan variabel tidak bebasnya.

Dalam penggunaan MCMC untuk menduga proporsi, konvergensi dicapai disekitar iterasi ke-500. Sementara taksiran beta dan varians telah menunjukkan kondisi stasioner sejak awal iterasi dilakukan. Taksiran proporsi dengan model HB memiliki nilai dan

kecenderungan yang hampir sama dengan hasil *direct estimation*. Ini mengindikasikan bahwa pendugaan HB menghasilkan penduga proporsi yang konsisten. Produk lainnya dari penggunaan model HB adalah diperolehnya taksiran $\hat{\beta}$ yang dapat digunakan untuk menaksir proporsi melalui persamaan 3.2.

DAFTAR PUSTAKA

- BPS. 2012. *Indeks Pembangunan Manusia 2010-2011*. Jakarta: BPS RI.
- Ghosh, Malay dan J.N.K. Rao. 1994. *Small Area Estimation: An Appraisal*. *Statistical Science* 9: 55-93.
- Hajarisman, Nusar. 2013. *Pemodelan Area Kecil Untuk Menduga Angka Kematian Bayi Melalui Pendekatan Model Regresi Poisson Bayes Berhirarki Dua-Level*. [Disertasi]. Bogor: Departemen Statistika, FMIPA Institut Pertanian Bogor.
- Maqin, Abdul. 2007. *Indeks Pembangunan Manusia: Tinjauan Teoritis dan Empiris di Jawa Barat*. <http://bisnis-jabar.com/wp-content/uploads/2011/04/IPM-New-Editing-Sumedang.pdf>, diakses pada 5 Agustus 2014.
- Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Republik Indonesia. 2004. *Undang-Undang No. 32 Tahun 2004 Tentang Pemerintahan Daerah*. Lembaran Negara RI Tahun 2004, No. 125. Sekretariat Negara. Jakarta.